Бомовские траектории и парадигма интегрирования по путям. Комплексная Лагранжева механика

В.И. Сбитнев[1]

(Получена 22 сентября 2008; опубликована 15 октября 2008)

Давид Бом в 50-х годах прошлого столетия показал, что уравнение Шредингера, описывающее эволюцию волновой функции, допускает разложение на два уравнения, имеющие дело с реальными функциями – действие и плотность вероятности. Первое уравнение является квантовым аналогом уравнения Гамильтона-Якоби, дополненное Бомовским кантовым потенциалом. Бомовский квантовый потенциал представляется суперпозицией двух Бомовских квантовых корректоров, каждый из которых модифицирует кинетическую и потенциальную энергии. В свою очередь второе уравнение представляет собой уравнение непрерывности плотности вероятности. Определяется функция энтропии. Она подчиняется уравнению баланса энтропии, которое вытекает из уравнения непрерывности. Объединение квантового уравнения Гамильтона-Якоби с уравнением баланса энтропии порождает комплексное уравнение Гамильтона-Якоби. Данное уравнение описывает сохранение энергии и энтропии в рассматриваемой квантовой системе. Определяется объединенная комплексная Лагранжева механика. Мнимый сектор представляет каналы для передачи квантовой информации вдоль реальных координат и импульсов системы.

Предисловие

Данная статья продолжает исследовать Бомовскую интерпретацию квантовой механики [Сбитнев, 2008]. Эта интерпретация устанавливает связь с уравнениями классической механики (см. Таблицу 1) , а именно, с уравнениями Гамильтона-Якоби и непрерывности.

Таблица 1: *Дуальное преобразование Лежандра уравнений классической механики*

<u>Переменные I:</u> Координата: $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$ Импульс: $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$	**<u>Переменные II:</u>** Координата: $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$ Скорость: $\dot{\vec{q}} = (\dot{q}_x, \dot{q}_y, \dot{q}_z)$
<u>Гамильтонова функция:</u> $H(\vec{p},\vec{q};t) = \sum_{n=1}^{3} p_n \dot{q}_n - L(\vec{q},\dot{\vec{q}};t)$ $\frac{\partial H}{\partial p_n} = \dot{q}_n$	**<u>Лагранжева функция:</u>** $L(\vec{q},\dot{\vec{q}};t) = \sum_{n=1}^{3} p_n \dot{q}_n - H(\vec{p},\vec{q};t)$ $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = p_n$

[1] E-mail: valery.sbitnev@gmail.com Санкт-Петербургский Институт Ядерной Физики, РАН

$\frac{\partial H}{\partial q_n} = -\dot{p}_n$	$\frac{\partial L}{\partial q_n} = \dot{p}_n$

Важным связующим звеном является Бомовский квантовый потенциал. В данной работе этот потенциал преобразовывается так и таким образом, что в результате мы находим, что уравнения квантовой механики соответствуют комплексным уравнениям Гамильтона-Якоби. По сути, это уравнения классической механики, продолженные на комплексное пространство состояний – комплексные координата и импульс.

Введение

Рождение квантовой механики связывают с Максом Планком [1901], открывшем, на кончике пера, константу $h \approx 6.626\times10^{-34}[\mathrm{Joule}\times\mathrm{sec}]$, необходимую для корректного представления формулы, которая описывает излучение абсолютно черного тела. В скором времени Эрвин Шредингер публикует статью [1926], в которой описано уравнение, названное его именем. Как показывает опыт решений уравнения Шредингера, оно дает корректное описание квантовой реальности. Уравнение Шредингера [Сбитнев, 2008]

$$i\hbar\frac{\partial\left|\psi(\vec{q},t)\right\rangle}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial q_n^2}\left|\psi(\vec{q},t)\right\rangle + U(\vec{q})\left|\psi(\vec{q},t)\right\rangle \qquad (1)$$

представляет «визитную карточку» нерелятивистской квантовой механики. Решением является волновая функция $\left|\psi(\vec{q},t)\right\rangle$ - комплексная функция, заданная в Гильбертовом пространстве состояний. Т.е. функция допускает разложение по ортогональным функциям в N -мерном Гильбертовом пространстве.

Давид Бом в 50х годах [1952(a),(b)] расщепил уравнение Шредингера на два связанных уравнений. В отличие от уравнения Шредингера, описывающего эволюцию комплексной волновой функции, эти уравнения имеют дело с реальными функциями. Первое из них есть модифицированное уравнение Гамильтона-Якоби:

$$-\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\nabla J\right)^2 + U(\vec{q}) + Q(\vec{q},t), \qquad (2)$$

второе уравнение представляет уравнение непрерывности плотности вероятности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho\,\nabla J/m\right) = 0. \qquad (3)$$

Здесь $J(\vec{q},t)$ и $\rho(\vec{q},t)$ являются реальными функциями, представляющими *действие* и *плотность вероятности*. В уравнение Шредингера они входят через волновую функцию

$$\psi(\vec{q},t) = \sqrt{\rho(\vec{q},t)}\cdot\exp\left\{iJ(\vec{q},t)/\hbar\right\}. \qquad (4)$$

Члены m и $U(\vec{q})$ представляют массу частицы и потенциал, в пределах которого эта частица распространяется. Здесь и далее ∇ и ∇^2 есть оператор градиента и лапласиан в N -мерном пространстве состояний.

Модифицированное уравнение Гамильтона-Якоби (1) не вполне похоже на своего классического собрата, из-за наличия квантового корректора

$$Q(\vec{q},t) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\left(\frac{\nabla \rho}{2\rho}\right)^2 - \frac{\nabla^2 \rho}{2\rho}\right). \tag{5}$$

Этот член называется Бомовским квантовым потенциалом. Квантовый потенциал входит с малым множителем $\hbar^2/2m$. Здесь $\hbar = h/2\pi \approx 1.05457\times10^{-34}[\mathrm{J}\times\mathrm{s}]$ является приведенной константой Планка, которая называется также как константа Дирака. В случае электрона $m \approx 9.1\times10^{-31}[\mathrm{kg}]$, например, множитель $\hbar^2/2m$ есть порядка $5.8\times10^{-5}[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}]$. А для протона/нейтрона $m \approx 1.6\times10^{-27}[\mathrm{kg}]$, этот множитель есть порядка $3.2\times10^{-8}[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}]$. Но для частицы с массой $m \sim 10^{-6}[\mathrm{kg}]$ вклад квантового корректора пренебрежимо мал, так как множитель $\hbar^2/2m$ составляет порядок $5.2\times10^{-29}[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}]$. По сути, это уже классическая частица, подчиненная, в крайнем случае, случайным блужданиям, но ни как не квантовая.

Квантовый корректор в роли информационного канала

Примем во внимание, что $\rho^{-1}\cdot\nabla\rho = \nabla\ln(\rho)$. В таком случае, Бомовский квантовый потенциал (5) допускает следующее представление [Сбитнев, 2008]

$$Q(\vec{q},t) \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{2}\nabla\ln(\rho)\right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{2}\nabla^2\ln(\rho)\right). \tag{6}$$

Введем логарифмическую функцию

$$S_Q(\vec{q},t) = -\frac{1}{2}\ln(\rho(\vec{q},t)) = -\ln\left(\sqrt{\rho(\vec{q},t)}\right), \tag{7}$$

смысл которой - энтропия. Так как перед логарифмом отсутствует множитель $\sqrt{\rho(\vec{q},t)}$, эта энтропия подобна Больцмановской энтропии - она характеризует степень порядка и хаоса некоторой сущности, которая является носителем $\rho(\vec{q},t)$. Квантовый корректор, выраженный через эту функцию, имеет вид:

$$Q(\vec{q},t) = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla S_Q\right)^2}_{(a)} + \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 S_Q}_{(b)}. \tag{8}$$

Здесь первый член, схваченный скобкой (a), представляется как квантовый корректор кинетической энергии $(\nabla J)^2/2m$. Второй член, схваченный скобкой (b), корректирует потенциальную энергию $U(\vec{q})$.

Принимая во внимание определения (7) и (8), перепишем уравнение (2) в виде обновленного модифицированного уравнения Гамильтона-Якоби

$$-\frac{\partial J}{\partial t} = \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\nabla J\right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla S_Q\right)^2}_{(a)} + \underbrace{U(\vec{q}) + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 S_Q}_{(b)} \;, \tag{9}$$

а вместо уравнения непрерывности (3) запишем уравнения баланса энтропии

$$\frac{\partial S_Q}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\nabla S_Q\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{v}\right). \tag{10}$$

Правый член в этом уравнении, $(\nabla\vec{v})/2$, представляет источник энтропии, который определяется наличием искажений в направлениях Бомовских траекторий. По сути, эти искажения характеризуют кривизну фазового пространства. Также, квантовый потенциал $Q(\vec{q},t)$, разложенный на две части (a) и (b) в (8), приписывается в модифицированном уравнении Гамильтона-Якоби отдельно к кинетической энергии и потенциальной энергии этого уравнения (помечено скобками (a) и (b) в (9)). В этой связи, член $Q(\vec{q},t)$ далее целесообразно называть Бомовский квантовый корректор.

По ту сторону Бомовского расщепления: комплексное уравнение Гамильтона-Якоби

В обоих представлениях, (9) и (10), задействована функция S_Q, названная далее как квантовая энтропия. Давайте умножим уравнение (10) на $-i\hbar$ и сложим эти два уравнения. В результате получаем комплексное уравнение:

$$-\frac{\partial (J + i\hbar S_Q)}{\partial t} = \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\nabla J\right)^2 + i\hbar\frac{1}{m}\left(\nabla J\cdot\nabla S_Q\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla S_Q\right)^2}_{(a)} + \underbrace{U(\vec{q}) - \frac{i\hbar}{2}\left(\nabla\vec{v}\right) + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 S_Q}_{(b)} . \tag{11}$$

Уместно определить комплексную функцию действия

$$J = J + i\hbar S_Q . \tag{12}$$

В этом случае можно видеть, что, охваченные скобкой (a), члены представляются как квадрат градиента этого комплексного действия, а именно

$$\frac{1}{2m}\left(\nabla J\right)^2 = \frac{1}{2m}\left(\nabla J\right)^2 + i\hbar\frac{1}{m}\left(\nabla J\cdot\nabla S_Q\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla S_Q\right)^2 . \tag{13}$$

Уравнение (11) может быть переписано в следующей форме

$$-\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\nabla J\right)^2 + \underbrace{U(\vec{q}) - \frac{i\hbar}{2}\left(\nabla\vec{v}\right) + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 S_Q}_{(b)} . \tag{14}$$

Охваченный скобкой (b), набор из трех членов содержит мнимый член $(\nabla\vec{v})/2$. Задача в том, чтобы все эти три члена представить, как происходящие из одного источника.

Давайте предположим, что таким источником могла бы быть комплексная функция $U(\vec{q}+\mathrm{i}\vec{\varepsilon})$. Разложение этой функции в ряд Тейлора по малому параметру $\vec{\varepsilon}$ дает

$$U(\vec{q}+\mathrm{i}\vec{\varepsilon}) \approx U(\vec{q})+\mathrm{i}\left(\vec{\varepsilon}\,\nabla U(\vec{q})\right)-\frac{\varepsilon^2}{2}\nabla^2 U(\vec{q})+\ldots \tag{15}$$

При сравнении данного разложения с членами, охваченными скобкой (b) в (14), находим, что малый параметр $\vec{\varepsilon}$, имеющий размерность длины, должен быть представлен как

$$\vec{\varepsilon}=\frac{\hbar}{2m}\sigma\cdot\vec{n}\,. \tag{16}$$

Здесь m - масса частицы, $\vec{n}=(n_1,n_2,\ldots,n_N)$ - единичный вектор, $(\vec{n}\cdot\vec{n})=1$. Параметр σ есть универсальная константа - “перевернутая скорость”:

$$\sigma=4\pi\varepsilon_0\frac{\hbar}{e^2} \approx 4.57\times10^{-7}\ [\mathrm{s/m}]\,. \tag{17}$$

Здесь $e\approx-1.6\times10^{-19}[\mathrm{C}]$ - элементарный заряд, переносимый единичным электроном, а $\varepsilon_0\approx 8.854\times10^{-12}[\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}]$ - диэлектрическая проницаемость вакуума. На особую роль константы σ обратил внимание Полуян, увязывая ее с такой сущностью, как информация [Полуян, 2002,2005]. Произведение этой константы на скорость света c, как известно, дает универсальную безразмерную константу равную $\alpha^{-1}\approx137$. Почему в (16) вместо σ не выбрана константа c^{-1}? Суть в том, что скорость света является важным параметром в релятивистской физике, но уравнение Шредингера имеет дело с нерелятивистскими скоростями. К тому же, данное уравнение анализирует объекты квантовой природы, где $\hbar$, константна Планка, играет ключевую роль.

Приняв представление (16) за истинное, разложение (15) можно переписать в виде

$$U(\vec{q}+\mathrm{i}\vec{\varepsilon}) \approx U(\vec{r})+\mathrm{i}\hbar\underbrace{\left(\vec{n}\cdot\left(\frac{\sigma}{2m}\nabla U(\vec{q})\right)\right)}_{(b_1)}-\frac{\hbar^2}{2m}\underbrace{\left(\frac{\sigma^2}{2m}\nabla^2 U(\vec{q})\right)}_{(b_2)}+\ldots\,. \tag{18}$$

В члене, охваченном скобкой (b_1), единичный вектор $\vec{n}$ указывает направление мнимого продолжения. Сила $\vec{F}=-\nabla U(\vec{q})$, умноженная на фактор $\lambda\cdot\vec{n}$, представляет элементарную работу, затраченную для перемещения на длину λ в направлении $\vec{n}$ [Ланцош, 1968]. Та же самая сила, помноженная на фактор $\sigma\cdot\vec{n}$ и деленная на массу m, представляет, в свою очередь, темп изменения скорости на единицу длины, т.е., она представляет дивергенцию скорости $(\nabla\vec{v})$. Таким образом, член, охваченный скобкой (b_1), может быть записан как

$$(b_1):\qquad \mathrm{i}\hbar\frac{\sigma}{2m}\left(\vec{n}\cdot\nabla U(\vec{q})\right) = -\mathrm{i}\hbar\frac{1}{2}\left(\nabla\vec{v}\right). \tag{19}$$

Что касается члена, охваченного скобкой (b_2), произведение $(s^2/2m)\cdot U(\vec{q})$ является безразмерным. С точностью до безразмерной аддитивной добавки $aq^2+(\vec{b}\vec{q})+c$, данное произведение сравнимо с энтропией S_Q. Так что, изменения энтропии происходят в тех же областях, где изменяется потенциальная энергия, и их изменения пропорциональны:

$$(b_2): \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{s^2}{2m}\nabla^2 U(\vec{q})\right)=\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 S_Q. \tag{20}$$

Таким образом, вместо трех членов, охваченных скобкой (b) в уравнении (14), мы можем записать одну комплексную функцию $U(\vec{r}+\mathrm{i}\vec{e})$, названную далее комплексным потенциалом. Здесь малый параметр $\vec{e}$ представляется как точка (16), заданная на сфере радиуса $\hbar s/2m$. Определим две комплексные величины - комплексная координата

$$\vec{Q} = \vec{q} + \mathrm{i}\vec{e} \tag{21}$$

и комплексный импульс

$$\vec{P} = m\dot{\vec{Q}} = \nabla J = \nabla J + i\hbar\nabla S_Q. \tag{22}$$

В согласии с данным определением, комплексное уравнение Гамильтона-Якоби (14) переписывается в форме

$$-\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{2m}(\nabla J)^2 + U(\vec{Q}) = H(\vec{Q},\vec{P};t) \tag{23}$$

Здесь $H(\vec{Q},\vec{P};t)$ - комплексная функция Гамильтона.

Распишем полную производную от комплексного действия

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial t} + \sum_{n=1}^{N}\frac{\partial J}{\partial Q_n}\frac{dQ_n}{dt} = \frac{\partial J}{\partial t} + \sum_{n=1}^{N}P_n\dot{Q}_n. \tag{24}$$

Комплексная производная расписывается как [Титчмарш, 1980, (гл. II)]:

$$\frac{\partial J}{\partial Q_n} = \frac{\partial J}{\partial q_n} + \mathrm{i}\hbar\frac{\partial S_Q}{\partial q_n} = P_n, \quad n=1,2,3. \tag{25}$$

Комбинируя (23) и (24), мы получаем дуальное преобразование Лежандра [Ланцош, 1968], связывающее комплексные Гамильтониан $H(\vec{Q},\vec{P};t)$ и Лагранжиан $L(\vec{Q},\dot{\vec{Q}};t)$:

$$\frac{dJ}{dt} = -H(\vec{Q},\vec{P};t) + \sum_{n=1}^{N}P_n\dot{Q}_n = L(\vec{Q},\dot{\vec{Q}};t). \tag{26}$$

Результаты выкладок подытожены в таблице 2:

Таблица 2: *Дуальное преобразование Лежандр уравнений комплексной механики*

Переменные I:	**Переменные II:**
Координата: $\vec{Q} = \vec{q} + i\frac{\hbar}{2m}s\vec{n}$ Импульс: $\vec{P} = \nabla J + i\hbar\nabla S_Q$	Координата: $\vec{Q} = \vec{q} + i\frac{\hbar}{2m}s\vec{n}$ Скорость: $\dot{\vec{Q}} = \dot{\vec{q}} + i\frac{\hbar}{2m}s\dot{\vec{n}}$
Гамильтониан: $H(\vec{Q},\vec{P};t) = \sum_{n=1}^{N} P_n\dot{Q}_n - L(\vec{Q},\dot{\vec{Q}};t)$ $\frac{\partial H}{\partial P_n} = \dot{Q}_n$ $\frac{\partial H}{\partial Q_n} = -\dot{P}_n$	**Лагранжиан:** $L(\vec{Q},\dot{\vec{Q}};t) = \sum_{n=1}^{N} P_n\dot{Q}_n - H(\vec{Q},\vec{P};t)$ $\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_n} = P_n$ $\frac{\partial L}{\partial Q_n} = \dot{P}_n$

Интеграл наименьшего действия, интеграл по траекториям

Комплексное уравнение Гамильтона-Якоби (23) имеет смысл переписать как интеграл

$$J = -\int_{t_0}^{t_1} H(\vec{Q},\vec{P};t)\,dt + C_1. \qquad (27a)$$

Нижний и верхний пределы интегрирования, t_0 и t_1, отмечают начало и конец фазовой траектории в *комплексном фазовом пространстве* $\vec{Q},\vec{P} \in \Omega_{\square}$. Тот же самый результат может быть вычислен напрямую, посредством интегрирования уравнения (26)

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{Q},\dot{\vec{Q}};t)\,dt + C_2 \qquad (27b)$$

Здесь C_1 и C_2 являются константами интегрирования. Здесь уместно вспомнит принцип д'Аламбера, $dJ = 0$ - «принцип Гамильтона» [Ланцош, 1968]. Он гласит, что движение произвольной системы происходит таким образом, что *определенный интеграл (27) приобретает стационарное значение по отношению к любым вариациям положения системы, при которых начальное и конечное положения остаются фиксированными.*

Давайте возьмем разность интегралов (27a) и (27b). Находим следующее условие, накладываемое на константы C_1 и C_2:

$$C_1 - C_2 = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{n=1}^{N} P_n \dot{Q}_n \, dt = \int_L \sum_{n=1}^{N} P_n dQ_n \tag{28}$$

Здесь L есть путь в пространстве состояний, начинающийся в момент времени t_0 в точке $\vec{Q}_{(0)}$ и в момент времени t_1 достигающий точки $\vec{Q}_{(1)}$. Интеграл по замкнутому пути C

$$\Gamma = \oint_C \sum_{n=1}^{N} P_n dQ_n \tag{29}$$

является *инвариантом движения* [Ланцош, 1968]. Это означает, если циркуляция вдоль замкнутой кривой равна нулю в момент времени $t_0 = 0$, то она будет равна нулю и в любой другой момент времени. Так например, если в «квантовой жидкости» отсутствуют вихри, они будут отсутствовать и далее. По сути, здесь озвучено правило – *циркуляция инвариантна при произвольном каноническом преобразовании* [Ланцош, 1968]. Заметим, что подынтегральная функция в (29) является комплексной. Так что, здесь имеет силу теорема о вычетах [Титчмарш, 1980, (гл. III)] - интеграл (29) равен сумме всех вычетов подынтегральной функции (с точностью до постоянного множителя $2\pi\mathrm{i}$), отнесенных к полюсам, которые имеет данная функция внутри области, ограниченной контуром C.

В заключение главы обсудим комплексную скорость $\dot{\vec{Q}}$. Из уравнения (22) следует

$$\dot{\vec{Q}} = \dot{\vec{q}} + \mathrm{i}\dot{\vec{e}} = \frac{1}{m}\vec{P} = \frac{1}{m}\nabla J + \mathrm{i}\frac{\hbar}{m}\nabla S_Q . \tag{30}$$

Принимая во внимание определение $\vec{e}$, данное в (16), находим

$$\dot{\vec{e}} = \frac{\hbar}{2m} s \cdot \dot{\vec{n}} = \frac{\hbar}{m}\nabla S_Q \qquad \Rightarrow \qquad \nabla S_Q = \frac{s}{2}\dot{\vec{n}} . \tag{31}$$

Единичный вектор $\vec{n}$ описывает движения на поверхности единичной сферы. Поэтому любые его изменения описываются как вращения на этой сфере, вызванные вариациями квантовой энтропии ∇S_Q. Эти вариации происходят в области, где изменяется потенциал $U(\vec{q})$, принуждающий изменяться Бомовскую траекторию.

Из уравнения (31) следует, конец малого вектора $\vec{e}$ описывает вращения на сфере радиуса $r = s\hbar / 2m$. Для электрона ($m \approx 9.1\times10^{-31}$[kg]), например, радиус составляет порядок 2.6×10^{-11}[m], а в случае протона или нейтрона ($m \approx 1.67\times10^{-27}$[kg]) этот радиус есть порядка 1.4×10^{-14}[m]. В частности, для массы покоя $m = 10^{-6}$[kg] = 1[mg] этот радиус становится соизмеримым с длиной Планка, 1.6×10^{-35}[m]. При достаточно больших массах радиус, как видно, схлопывается. И задача сводится к квазиклассической постановке.

Бомовские траектории. Фейнмановский интеграл по траекториям

Опираясь на вычисленные интегралы (27a), (27b), волновая функция, представляющая решение уравнения Шредингера, теперь может быть записана в следующей форме:

$$\left|\Psi(\vec{Q},t)\right\rangle = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}J\right\} = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}J - S_Q\right\}. \tag{32}$$

Плотность вероятности, вычисленная при найденной функции $|\Psi(\vec{Q},t)\rangle$, есть

$$\left\langle\Psi(\vec{Q},t)\,|\,\Psi(\vec{Q},t)\right\rangle = \exp\{-2S_Q\} = \exp\{\ln[\,r(\vec{q},\vec{p},t)]\} = r(\vec{q},\vec{p},t). \tag{33}$$

Подставляя интегралы (27a), (27b), волновая функция $|\Psi(\vec{Q},t)\rangle$ принимает вид

$$\left|\Psi(\vec{Q},t)\right\rangle = \frac{1}{Z_1}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_1} H(\vec{Q},\vec{P};t)\,dt\right\}, \tag{34a}$$

или эквивалентно

$$\left|\Psi(\vec{Q},t)\right\rangle = \frac{1}{Z_2}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_1} L(\vec{Q},\dot{\vec{Q}};t)\,dt\right\}. \tag{34b}$$

Здесь $Z_1 = \exp\{-i/\hbar\cdot C_1\}$ и $Z_2 = \exp\{-i/\hbar\cdot C_2\}$ являются нормировочными константами. Принцип Гамильтона, переформулированный для случая экспонент (34), озвучивается в следующем ключе - движение произвольной системы происходит таким образом, что *экспонента (34) приобретает стационарное значение по отношению к любым вариациям положения системы, при которых начальное и конечное положения остаются фиксированными.*

Фундаментальный принцип квантовой механики – принцип суперпозиции – гласит, что сумма волновых функций $|\Psi_l(\vec{Q},t)\rangle$, $l = 1, 2, \ldots$, может также представлять решение квантово-механической системы. Например, плотность вероятности суперпозиции двух функций, отнесенных к двум различным путям, представляется как

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2}\left\langle\Psi_l(\vec{Q},t)\right|\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\left|\Psi_k(\vec{Q},t)\right\rangle \\ &= \frac{1}{4}\left(\exp\{-2S_{Q,1}\} + \exp\{-2S_{Q,2}\} + \overbrace{2\exp\{-S_{Q,1} - S_{Q,2}\}\cos((J_1 - J_2)/\hbar)}^{\text{Интерференционный член}}\right).\end{aligned} \tag{35}$$

Косинус в этом выражении может меняться в интервале от -1 до $+1$, в зависимости от разности $(J_1 - J_2)$. Так что, предельные значения этой плотности есть

$$\frac{1}{4}\left(\exp\{-2S_{Q,1}\} - \exp\{-2S_{Q,2}\}\right)^2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{4}\left(\exp\{-2S_{Q,1}\} + \exp\{-2S_{Q,2}\}\right)^2,$$

соответственно. Рисунок 1, например, показывает рассеяние гауссового волнового пакета на экране, состоящего из двух щелей [Морозов, 2005]. В дальней зоне, зоне Фраунгофера, формируется хорошо различимый интерференционный паттерн [Ландау и Лифшиц, 1988].

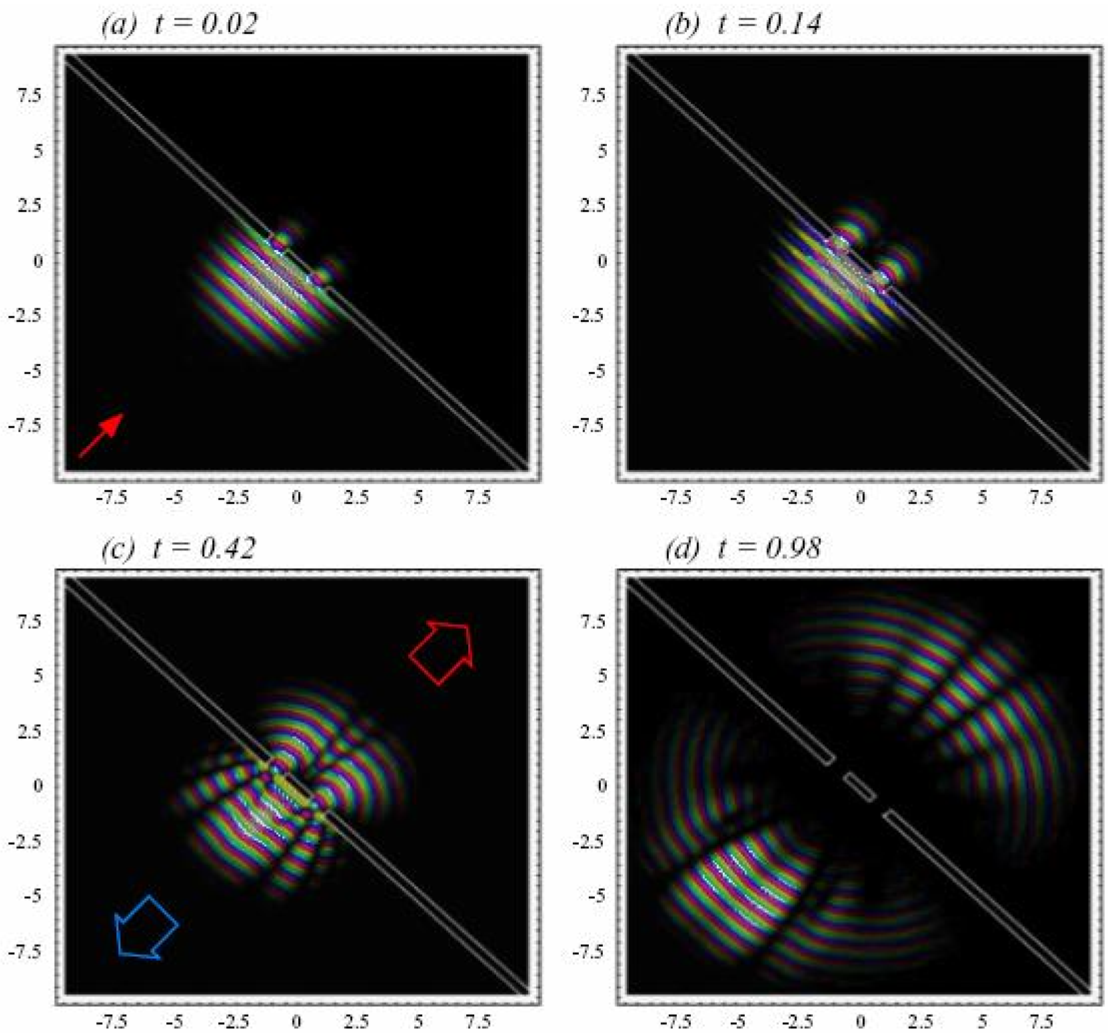

Рисунок 1

Рассеяние волнового пакета y на экране, имеющего две щели.

Плотность вероятности такого паттерна в зоне Фраунгофера, как следует из (35), есть

$$P(x) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{r_1(x) + r_2(x)}_{(a)} \; + \; 2\sqrt{r_1(x)\, r_2(x)} \cdot \cos\left(k x\right) \right). \tag{36}$$

Данная функция изображена на Рисунке 2. Здесь плотности $r_1(x)$ и $r_2(x)$ представлены функцией нормального распределения

$$r_l(x) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} \exp\left\{ -\frac{(x - x_l)^2}{2s^2} \right\}. \tag{37}$$

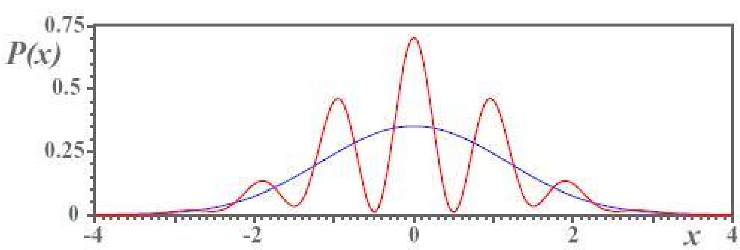

Рисунок 2.
Красная кривая показывает плотность вероятности (36). Синяя представляет среднее значение $(r_1(x) + r_2(x))/2$, схвачено скобкой (a) в формуле (36). Параметры есть $s = 1$, $x_1 = -x_2 = 0.5$.

Щели $l = 1,2$ находятся на расстоянии $\Lambda = x_1 - x_2 = 1$ друг от друга. И длина волны $\lambda = 2\pi / k$ кратна Λ, где k - волновое число.

Фейнмановские интегралы представляются расширенной версией функции (34b), которая подсчитывает не только траектории, удовлетворяющие принципу наименьшего действия (траектории Бома), но всевозможные траектории, выпадающие из этого принципа.

Фейнмановский формализм восходит к раннему наблюдению Дирака, заметившего, что действие играет важную роль в классической механике. В статьях [Dirac, 1933, 1945] Дирак привлек внимание к члену $\exp\{iS/\hbar\}$, играющего роль функции распространения (propagator), где S есть классическое действие (в данной статье обозначаемое буквой J). Дираковское наблюдение придало мощный импульс Фейнмановским изысканиям. Он отвел ведущую роль члену $\exp\{iLdt/\hbar\}$, как амплитуде перехода между состояниями, разделенными инфинитезимальным промежутком dt, и его глубокой связи с принципом наименьшего действия в классической механике. Фейнман развил эту идею [1948], включив в рассмотрение не только классические пути, но и множество других путей [Feynman & Hibbs, 1965]. Фейнмановские траектории являются всевозможные траектории, идущие из начального пункта A в конечный пункт B - виртуальные траектории. Здесь прямо используется принцип суперпозиции – все произвольные траектории доступны, представляющие возможные истории эволюции квантово-механической системы. Вклады большинства путей будут гасить друг друга, из-за интерференционных эффектов. Краткие истории включают рождающиеся и взаимно уничтожающиеся парные пути. Так что формализм Фейнмановского интегрирования по путям является интуитивным, но вместе с тем более мощным способом анализа едва различимых деталей квантового процесса. Математически, Фейнмановский интеграл (с последующей дискретизацией по решетке) в Декартовых координатах может быть представлен как [Grosche, 1996]

$$G(\vec{Q}'',t;\vec{Q}',t_0) = \underbrace{\overbrace{\iint\cdots\int D(\vec{Q}(t))}^{\vec{Q}(t)=\vec{Q}''}}_{\vec{Q}(t_0)=\vec{Q}'} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_1} L(\vec{Q},\dot{\vec{Q}};t)\,dt \right\}. \tag{38}$$

Здесь

$$\underbrace{\overbrace{\iint\cdots\int D(\vec{Q}(t))}^{\vec{Q}(t)=\vec{Q}''}}_{\vec{Q}(t_0)=\vec{Q}'} \;\Leftrightarrow\; \left(2\pi i\hbar dt/m\right)^{-M/2} \int_{\vec{Q}'}^{\vec{Q}''} d\vec{Q}_1 \int_{\vec{Q}'}^{\vec{Q}''} d\vec{Q}_2 \cdots \int_{\vec{Q}'}^{\vec{Q}''} d\vec{Q}_M \tag{39}$$

в пределе $dt \to 0$, $M \to \infty$, $Mdt = t - t_0$. Множитель $(2\pi i\hbar dt/m)$ имеет размерность длины в квадрате (m - масса частицы). Таким образом, размерность множителя $(2\pi i\hbar dt/m)^{-M/2}$ есть $[\text{длина}^2]^{-M/2} = [\text{длина}]^{-M}$.

“Ахиллесовой пятой” Фейнмановского метода являются патологии «бесконечной меры», «бесконечной суммы по путям», и другие. [Grosche, 1993, 1996]. Чтобы избежать этих препятствий, ДеВитт [1957] вводит квантовый корректор $\Delta V_{DeW} = \hbar^2 / 6m \cdot R$, где R - скалярная кривизна. Этот корректор является необходимой деталью, чтобы из интеграла по путям можно было бы извлечь уравнение Шредингера. Ту же самую роль, в частности, выполняет и Бомовский квантовый потенциал, имеющий порядок $\hbar^2 / 2m$, который извлекается непосредственно из уравнения Шредингера. В этом ключе только Бомовские траектории, удовлетворяющие принципу наименьшего действия, являются оптимальными траекториями. Остальные траектории уничтожают друг друга, благодаря интерференции между ними.

(a) (b)

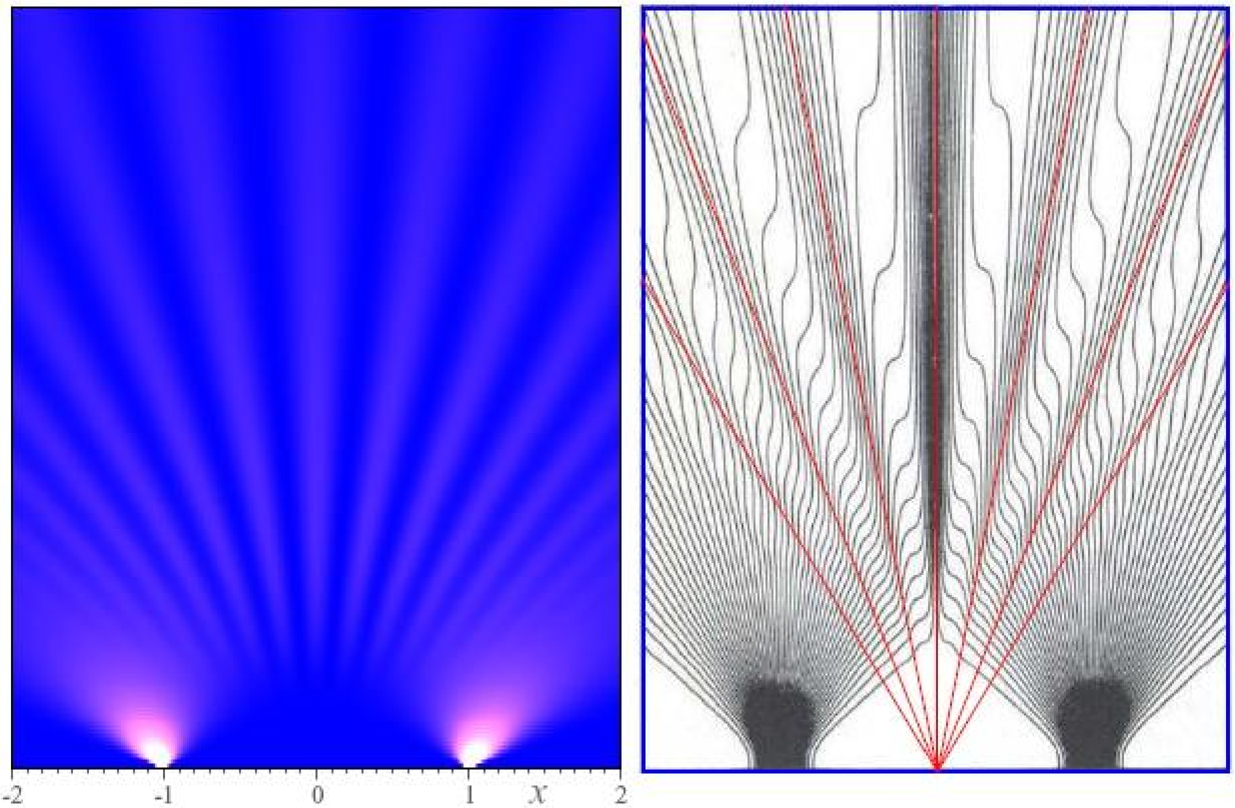

Рисунок 3. Двух-щелевая интерференция. (a) Реконструированная сцена интерференции на двух щелях; (b) двух-щелевой интерференционный паттерн, представленный Бомовскими траекториями (черно-белый рисунок показан в статье [Bohm, 1990], красные линии аппрксимируют пучки Бомовских траектрий).

Рисунок 3(a) иллюстрирует реконструированную сцену интерференции на двух щелях. Для сравнения на правом рисунке 3(b) показан интерференционный паттерн рассеяния Бомовских траекторий на двух щелях (черно-белый рисунок, показанный в статье [Bohm, 1990]). Красные линии, прочерченные на этом рисунке, показывают направления пучков Бомовских траекторий. Линии позволяют лучше сравнить два примыкающих рисунка.

Заключительные замечания

Бомовские траектории, Фейнмановский интеграл по траекториям дополняют друг друга в свете интерпретации утонченных деталей эволюции квантово-механической системы. Первые непосредственно вытекают из принципа наименьшего действия. Вторые, в свою очередь, подсчитывают все пути скопом. Только те пути выживают, которые подчиняются принципу наименьшего действия. Остальные уничтожают друг друга из-за взаимной интерференции. В результате, выживают те самые Бомовские траектории.

Принцип наименьшего действия вытекает из вариации теперь уже комплексного интеграла действия. По сути, здесь мы соприкасаемся с новой, продолженной в мнимый сектор, «классической механикой». Однако, от классики здесь остаются только внешне похожие уравнения Гамильтона-Якоби, Лагранжа-Эйлера, принцип д'Аламбера, принцип Гамильтона, дуальные преобразования Лежандра, и другие математические формы. Существенное отличие в том, что здесь как координаты, так и импульсы частиц являются комплексными переменными.

Что это может значить? Давайте восстановим комплексное уравнение Гамильтона-Якоби в обратном порядке – начнем с уравнений классической механики. Два уравнения, оба реальные, являются уравнение Гамильтона-Якоби [Ланцош, 1968]

$$-\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\nabla J\right)^2 + U(\vec{q}) \ , \tag{40}$$

представляющее движение механической системы с приведенной массой m, и уравнение непрерывности (уравнение сохранения числа частиц в единице объема V)

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \nabla\left(r\,\vec{v}\right) = 0 \ \Rightarrow \ \frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\nabla r\right) = -r\left(\nabla\vec{v}\right). \tag{41}$$

Следует обратить внимание, что уравнение непрерывности зависит от решений уравнения Гамильтона-Якоби через параметр скорости $\vec{v} = \nabla J / m$. Но уравнение Гамильтона-Якоби не включает, как видно, зависимости от плотности r . Здесь плотность числа частиц r , заключенных в объеме V , является фундаментальной характеристикой, констатирующей факт, что масса, заключенная в элементе объема dt , определяется как $dm = r\,dt$. Общая масса частиц, заселяющих объем V , есть

$$m = \int_V r\,dt \ . \tag{42}$$

Очевидно, с точностью до нормировочной константы (которая в данном случае есть ни что иное как m) плотность r представляет, по сути, плотность вероятности обнаружить частицу в окрестности точки $(\vec{q}, \vec{p})$. Здесь фазовые координаты $\vec{q}$ и $\vec{p}$ представляют координату и импульс механической системы - они находятся из решения уравнения (40). В данном случае мы сталкиваемся с некоторой неопределенностью – любая частица, поведение которой описывается уравнением Гамильтона-Якоби (40) и зарегистрированная в согласии с плотностью вероятности r в окрестности точки $(\vec{q}, \vec{p})$, показывает одни и те же параметры $\vec{q}$ и $\vec{p}$ - осредненные параметры, отнесенные к механической системе. Тогда как рой частиц, заключенных в объеме V, проявляет (как следовало бы ожидать, опираясь на статистическую механику) статистический разброс по координатам и скоростям. Следовательно, $\vec{q}$ и $\vec{p}$ могут быть зарегистрированы только с точностью до неопределенного, статистического разброса $\Delta\vec{q}$ и $\Delta\vec{p}$.

В связи с только что сказанным, имеет смысл определить функцию

$$S_C = -\ln(r), \tag{43}$$

которую назовем классической энтропией. Здесь энтропия определена с точностью до константы $\ln(m)$. Она характеризует степень беспорядка в ансамбле частиц, населяющих объем V. Суть энтропии заключается в том, что чем больше энтропия, тем больше неопределенность [Смородинский, 1981], приводящая к статистическому разбросу по координатам $\Delta\vec{q}$ и импульсам $\Delta\vec{p}$, и наоборот.

Теперь можно переписать уравнение непрерывности (41) в другой форме

$$\frac{d S_C}{d t} = \frac{\partial S_C}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla S_C) = (\nabla \vec{v}). \qquad (44)$$

Это уравнение называется уравнением баланса энтропии [Wikipedia(entropy), 2008]. С правой стороны уравнения имеется в наличии единственный член $(\nabla \vec{v})$, представляющий источник/сток энтропии. В общем же случае уравнение баланса энтропии выглядит как

$$\frac{dS}{dt} = \boxed{\begin{matrix}\text{всевозможные} \\ \text{источники энтропии}\end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix}\text{всевозможные} \\ \text{стоки энтропии}\end{matrix}}.$$

Всевозможные источники и стоки энтропии могли бы быть представлены обменом частиц с внешней средой через поверхность раздела, каналами рождений и уничтожений частиц в пределах заданного объема V, изменениями состояний существующих частиц в фазовом пространстве, т.е., пространстве «*координата-импульс*», и так далее. Так как энтропия представляется как логарифм от плотности вероятности (43), то она характеризует степень порядка (или беспорядка) в ансамбле частиц, населяющих объем V. Статистическая термодинамика утверждает, что при заданной температуре T механической системы, произведение $dQ = TdS$ представляет количество тепла, подводимого к системе (хаос в рое частиц, населяющих объем V, увеличивается [Смородинский, 1981]). В другом случае, $dS < 0$, тепло отводится от системы. В этом случае частицы демонстрируют более упорядоченное движение. Приведенная формула для оценки количества тепла аналогична количеству работы, совершаемой над системой $dA = -pdV$ [Смородинский, 1981]. Здесь p - давление, оказываемое ансамблем частиц на стенки объема V, а dV - малое приращение этого объема. Обе величины – приращение тепла dQ и работы dA имеют ясный физический смысл. Также величины V и S имеют общий признак – объем любой системы равен сумме объемов ее частей, точно также энтропия системы равна сумме энтропий ее частей. А вот температура и давление показывают одни и те же значений в любых частях системы.

Что касается квантово-механической реальности, в данном случае величина $\hbar dS$ имеет размерность действия. Деленная на единицу времени dt, она пропорциональна энергии. По аналогии с термодинамическими формулами, данными выше, можно также полагать, что $\hbar dS$ представляет количество энергии, подводимое к системе за единицу времени. Это количество энергии обусловлено увеличением хаоса виртуальных частиц в резервуаре V. И обратно, отвод такого количества энергии вызывает понижение хаоса в данном резервуаре. Здесь появляется новая сущность – *виртуальные частицы*. Что это такое? В отличие от классического случая, где объем V содержит ансамбль реальных частиц, здесь мы вынуждены оперировать объектами а-ля Фейнман – виртуальными частицами. В принципе, продолжая эту традицию до логического конца, можно думать, что до тех пор, пока детектор не зарегистрировал частицу, она пребывает в виртуальном состоянии, т.е., она находится *всюду и нигде*. Эта картина перекликается с Бомовской философией Единства и Запутанного Порядка [Bohm, 1980]. Суть философии в том, что все отдельно наблюдаемые объекты, сущности, структуры, и события в видимом или развивающемся мире вокруг нас являются относительно автономными, устойчивыми, временно пребывающими в подсовокупностях (subtotalities), которые возникают из более глубокого, запутанного порядка целостного единства. Вот образный пример, приведенный Бомом в выше упомянутой монографии на стр. 48: “*в ручье можно видеть в любое время меняющиеся паттерны вихрей, ряби, волн, брызг, и т.д., которые, очевидно, не являются независимыми как таковыми. Скорее они представляются абстрагированной формой* *бурлящего движения, возникающие и исчезающие в общем хороводе эволюции потока. Такое мимолетное бытие, в равной степени могущее проявлять такие абстрактные формы, подразумевает только их относительную независимость или автономное поведение, но не абсолютно независимое существование в качестве окончательной субстанции".* Выход из небытия в наблюдаемую реальность и обратно представляет ключевую идею Бомовской философии, выраженной в словосочетании implicate--explicate order (условно-спутанный--определенный порядок). Для более полного ознакомления с подобными проблемами, здесь уместно отправить к статьям Сергея Доронина [2004(a), 2004(b), 2007], Заречного [2006].

Теперь умножим уравнение (44) на мнимый параметр $\mathrm{i}h$ [2] и вычтем результат из уравнения (40). Получим следующее уравнение:

$$-\frac{\partial(J+\mathrm{i}hS_C)}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\nabla J\right)^2 + \mathrm{i}h(\vec{v}\cdot\nabla S_C) + U(\vec{q}) - \mathrm{i}h\left(\nabla\vec{v}\right). \qquad (45)$$

Так как действие J имеет размерность [энергия×сек], эту же размерность должен иметь и параметр h (поскольку энтропия S_C безразмерна). Таким параметром, как известно, является постоянная Планка. Сравнивая энтропии S_C и S_Q, уравнения (43) и (7), находим соответствие $S_C = 2S_Q$. Сравнивая теперь уравнение (45) с уравнением (11), можно видеть, здесь не хватает Бомовского квантового потенциала (8), который определяет обратную связь уравнения непрерывности с уравнением Гамильтона-Якоби. Он определяет также полный квадрат (14), приводящий к комплексному импульсу $\dot{P} = \nabla J + i\mathbf{h}\nabla S_Q$. Этот потенциал, дает возможность определить комплексную координату $\dot{Q} = \vec{q} + \mathrm{i}\mathbf{h}s\vec{n}/2m$.

Как представить упрощённо появление дополнительной мнимой степени свободы? "Проведем" через пространство линию. С нашей точки зрения она состоит из точек. Однако вообразите, что при очень сильном увеличении каждая точка такой линии становится кольцом с радиусом порядка $\mathbf{h}/2m$. Это и есть проявление дополнительного измерения. Сейчас подобной манипуляцией не очень удивишь мир, если даже в современных теориях суперструн в кольца сворачивают 8-ми мерные, 12-ти мерные пространства. Наш повседневно наблюдаемый мир может расслаиваться по этим дополнительным измерениям на манер многомерных миров Хьюга Эверетта [Everett, 1957; DeWitt & Graham, 1973]. Эти дополнительные измерения могут быть источниками неопределенных фаз. А при более буйном воображении, телепортации и распространение вспять по времени, сквозь эти дополнительные измерения, являются достойными примерами для приложения своих сил и мыслительным способностей.

Литература

Bohm, D., [1952(a)] "A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "Hidden Variables", I", *Physical Review*, **85**, 166-179.

Bohm, D., [1952(b)] "A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "Hidden Variables", II", *Physical Review*, **85**, 180-193.

Bohm, D., [1980] *Wholeness and the Implicate Order*, (Routledge & Kegan Paul, London, Boston).

[2] Здесь пока не конкретизируется значение параметра h. Все размерности в уравнениях, однако, должны оставаться согласованными. Это будет определять размерность данного параметра.

Bohm, D., [1990] "A new theory of the relationship of mind and matter", *Philosophical Psychology*, **3**(2), 271-286.

DeWitt, B. S., [1957] "Dynamical Theory in Curved Spaces. I. A Review of the Classical and Quantum Action Principles," *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 377.

DeWitt, B. S. and Graham, N., [1973] *The many-worlds interpretation of quantum mechanics*, (Princeton University Press, Princeton).

Dirac, P. A. M., [1933] "The Lagrangian in quantum mechanics, " *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, **3**, 64-72.

Dirac, P. A. M., [1945] "On the analogy between classical and quantum mechanics, " *Rev. Mod. Phys.* **17**(2 and 3), 195-199.

Everett, H., [1957] "Relative state formulation of quantum mechanics," *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 454-462.

Feynman, R. P., [1948] "Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics," *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 367.

Feynman, R. P. and Hibbs, A., [1965] *Quantum Mechanics and Path Integrals*, (McGraw Hill, N. Y.).

Grosche, C., [1993] "An introduction into the Feynman path integral," in: http://xxx.lanl.gov/PS_cache/hep-th/pdf/9302/9302097v1.pdf , arXiv:hep-th, 302097v1 (20 Feb.).

Grosche, C., [1996] *Path integrals, hyperbolic spaces, and Selberg trace formulae*, (World Scientific, Singapore).

Planck, M., [1901] "On the Law of Distribution of Energy in the Normal Spectrum," *Annalen der Physik*, **4**, 553.

Schrodinger, E., [1926] "An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules," *Phys. Rew.*, **28**(6), 1049-1070.

Wikipedia(entropy), [2008] "Entropy", http://en.wikipedia.org/wiki/Entropy

Доронин, С. И., [2004(a)] "Роль и значение квантовой теории в свете ее последних достижений," *Квантовая Магия*, 1(1), 1101-1122

Доронин, С. И., [2004(b)] "Мера квантовой запутанности чистых состояний," *Квантовая Магия*, **1**(1), 1123-1137.

Доронин, С. И., [2007] *Квантовая магия*, («Весь», Санкт-Петербург, http://www.ppole.ru/doronin/)

Заречный, М., [2006] *Квантово-мистическая картина мира*, (Весь, Санкт-Петербург, http://www.ppole.ru/doronin/).

Ландау, Л. Д. and Лифшиц, Е. М., [1988] *Теория поля, том II*, (Наука, М.)

Ланцош, К., [1965] *Вариационные принципы механики*, (Мир, М.)

Полуян, П. В., [2002] "Нестандартный анализ неклассического движения," http://res.krasu.ru/non-standard/

Полуян, П. В., [2005] "Неклассическая онтология и неклассическое движение," *Квантовая магия*, **2**(3), 3119-3134; http://quantmagic.narod.ru/volumes/VOL232005/p3119.html

Морозов, В. Б., [2005] "Электрон", на форуме www.lebedev.ru, http://phorum.lebedev.ru/viewtopic.php?t=14, (6)

Сбитнев, В. И., [2008] "Бомовское расщепление уравнения Шредингера на два уравнения, описывающих эволюцию реальных функций," *Квантовая Магия*, **5**(1), 1101-1111; http://quantmagic.narod.ru/volumes/VOL512008/p1101.html

Смородинский, Я. А., [1981] *Температура*, (Наука, М.).

Титчмарш, Е., [1980] Теория функций, (Наука, М.).