

Виртуальные, случайные, квантово-механические движения. Принцип наименьшего действия

В.И. Сбитнев¹

(Получена 03 июня 2008; опубликована 15 июля 2008)

Компьютерная индустрия вышла на уровень миниатюризации чипов, вплотную приблизив их объектам, подчиняющимся законам квантовой механики. Переходная область, где пересекаются законы квантовой и классической механики, остается, в некотором смысле, *terra incognita*. Давид Бом показал [1952] каким образом соприкасаются уравнение Шредингера (“визитная карточка” квантовой механики) с уравнением Гамильтона-Якоби (“визитная карточка” классической механики). Дается краткий обзор вариационных принципов классической механики, приводящих к уравнению Гамильтона-Якоби. Показано, что к интегралу действия, лежащего в основе принципов классической механики, приводит Марковская цепь, оперирующая с среднегеометрической вероятностью перехода. Определяется Марковская цепь с комплексной переходной амплитудой вероятности, приводящая к интегралу действия, лежащего в основе уравнения Гамильтона-Якоби, модифицированного Бомовским квантовым потенциалом (квантовым корректором).

1. Введение

Вариационные принципы механики - их начала, пути становления, и утверждения в лаконичных математических формулировках – представляют одну из увлекательных страниц развития человеческого познания законов природы. В замечательной монографии “Вариационные принципы механики” [Ланцош, 1968] эта история становления изложена Корнелиусом Ланцошом с прекрасным знанием исторического материала.

Ньютон (*Newton, 1643-1727 гг.*) и Лейбниц (*Leibniz, 1646-1716 гг.*) – два универсала-мыслителя, творившие в XVII веке, один в Англии другой в Германии, развивали различные подходы к описанию физической реальности. Первый к описанию реальности привлекал измерение скоростей, ускорений, сил. Все эти величины являются векторами. Второй был приверженцем «живой силы» (*vis viva*) - произведение массы тела на квадрат скорости - полагая, что именно она является истинной мерой силы. Лейбниц открыл закон сохранения «живых сил», явившийся первой формулировкой закона сохранения энергии, а также высказал идею о превращении одних видов энергии в другие. Исходя из философского принципа оптимальности всех действий природы, Лейбниц сформулировал один из важнейших вариационных принципов физики – «принцип наименьшего действия». Инерция сама есть сила: наделение пассивной материи способностью к движению следовало бы отнести к разряду чудес.

Живая сила представляется естественным продуктом философского творчества Лейбница. Будучи одним из величайших представителей новоевропейской метафизики, Лейбниц уделял пристальное внимание вопросу о том, что такое субстанция. Согласно Лейбницу, основаниями существующих явлений или феноменов служат простые субстанции или монады. Все монады просты, т.е., не содержат частей, и их бесконечно много. Все монады отличаются между собой. Этим обеспечивается бесконечное разнообразие мира. С философским мировоззрением Лейбница можно ознакомиться в полной мере в Интернет-изданиях [Википедия(Лейбниц), 2008; College.ru/mathematics,

¹ Valery.sbitnev@gmail.com, Санкт-Петербургский Институт Ядерной Физики им. Б.П.Константинова, РАН.

2008]. Здесь мы только конспективно изложим его философское учение в перспективе последующего осмысливания квантово-механической картины мира.

Монады созданы Богом и могут быть уничтожены все сразу. Внутренние состояния монад не зависят от внешних причин - только Бог может вмешиваться в эту организацию. Однако, монады способны к восприятию своей внутренней жизни. Восприятие – процесс приема и преобразования информации, формирующий субъективный целостный образ. Поскольку восприятие присуще главным образом живым существам, Лейбниц, как видно, одухотворяет природу. Лейбниц идет дальше - монады, имеющие более отчетливые признаки восприятия, сопровождающиеся памятью, он называет душами. Некоторые монады в ходе своего внутреннего развития достигают уровня осознанного восприятия. Таким образом, не существует неодушевленной природы. Лейбниц говорит, что монады, которые персонифицируют явления «неодушевленной» природы, на самом деле находятся в состоянии глубокого сна – каждая неразвитая монада может быть волей Бога вызвана к осознанной жизни.

В каждой монаде в потенциале свернута целая Вселенная. Бесконечный прогресс всей совокупности монад представлен в двух аспектах. Первый - это развитие царства природы, где главенствует механическая необходимость. Второй – это развитие царства духа, где основным приоритетом является свобода. Души представляют, по собственному выражению Лейбница, “живые зеркала Вселенной”. Однако, разумные души представляют, вместе с тем, отображения самого Бога. Следуя позициям Лейбница, можно сказать, что разум человека – это тоже монада, а привычные атомы представляют спящие монады. Так как тело человека, в том числе и мозг, соткано из мириад атомов, собранных в определенной комбинации, тело также является спящей монадой, представляющей «скафандр»² для обитания души в этом мире. Для чего нужна данная “экспедиция” в этот мир, не всем открыта эта тайна. Но как учат многие религии, каждый человек выполняет вполне определенную миссию. Как он ее выполнит, во многом определяется последующее состояние души, покинувшей «скафандр». Мы не будем далее вдаваться в эти довольно тонкие вопросы. Они в значительной степени проработаны во многих религиозных и мистических учениях. В свете современных научных проблем эта тема частично освещена в работах [Доронин, 2007; Заречный, 2006]. Здесь же займемся более приземленными вопросами, связанными с движениями материальных тел.

Великие люди мыслят глобальными категориями. Лейбниц со своей метафизикой – один из них. Телеологические пристрастия и метафизический опыт раскрывали перед его взором движения в окружающем мире как признак божественного провидения. В целом, это способствовало развитию вариационных методов механики. Может ли человеческий разум предвидеть гармонию движений материальных тел? Выражаясь более строгим языком, можно ли предсказать по какой траектории будет двигаться материальное тело, зная начальное положение тела, его скорость и рельеф местности? Давайте мысленно прочертим самые всевозможные траектории, соединяющие начальную и конечную точки, и попытаемся выбрать из них оптимальную траекторию. Здесь сразу возникает ряд вопросов. Что значит оптимальность траектории, и каков критерий ее отбора? И что, вообще, означает набор всевозможных траекторий, прочерчиваемых мысленно?

2. Принцип наименьшего действия

² «биоскафандр» с исключительно сложной системой жизнеобеспечения. При правильно профилактике может находиться в эксплуатации примерно до 70-100 лет.

По сути, идея о расширении существующей реальности путем включения «пробных» возможностей с последующим выделением одной из них при помощи условия, что она соответствует минимуму некоторой величины, как будто вводит *целенаправленность* в поток природных явлений. Это находится в противоречии с обычным *причинным* описанием событий. Основным лейтмотивом, однако, здесь является кажущаяся гармония между «разумом» и «миром» [Ланцош, 1968].

Оказывается, достаточно иметь только две скалярные величины, чтобы проверить «пробные» возможности и отобрать оптимальную траекторию. Эти скалярные величины - «кинетическая энергия» и «силовая функция» - представляют суть вариационной теории, в последующем развитой Эйлером (*Euler, 1707-1783 гг.*) и Лагранжем (*Lagrange, 1736-1813 гг.*). Полная свобода в выборе системы координат дает возможность формулировать выкладки и результаты в произвольной системе отсчета – в той, в которой результаты выглядят наиболее удобоваримо. Дальнейшее развитие теории, проведенное Гамильтоном (*Hamilton, 1805-1865 гг.*) и Якоби (*Jacobi, 1804-1851 гг.*), чрезвычайно расширило вариационные методы путем введения канонических уравнений с их значительно более широкими возможностями преобразований. Все уравнения, описывающие оптимальные траектории, могут быть получены из одного объединяющего принципа, инвариантного относительно выбора любой системы координат. По этой причине всегда можно выбрать систему координат наиболее удобную для решаемой задачи. Этот принцип заключается в нахождении минимума определенной величины, называемой *действием*:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1, \mathbf{L} q_n; \mathbf{\dot{q}}_1, \mathbf{L} \mathbf{\dot{q}}_n; t) dt + C. \quad (1)$$

Здесь наборы параметров $\{q_1, \mathbf{L} q_n\}$ и $\{\mathbf{\dot{q}}_1, \mathbf{L} \mathbf{\dot{q}}_n\}$ представляют обобщенные координаты и скорости n материальных тел, например шаров. Скалярная функция $L(q_1, \mathbf{L} q_n; \mathbf{\dot{q}}_1, \mathbf{L} \mathbf{\dot{q}}_n; t)$, представляющая разность кинетической и потенциальной энергий этих тел, называется функцией Лагранжа и определяет целостную динамику рассматриваемой системы n тел. Константа C , для простоты, обычно полагается равной нулю.

Давайте теперь найдем экстремум функционала (1). Это есть классическая задача математического анализа. Она предполагает введение малого отклонения функционала от заданного изначально его значения и приравнивания к нулю их разницы

$$dJ = d \int_{t_0}^{t_1} L(q_1, \mathbf{L} q_n; \mathbf{\dot{q}}_1, \mathbf{L} \mathbf{\dot{q}}_n; t) dt = 0. \quad (2)$$

Чтобы не усложнять картину изложения будем предполагать, что начальные и конечные позиции являются фиксированными, иными словами, наложим на границах условия

$$dq_k(t)|_{t=t_0} = 0, \quad dq_k(t)|_{t=t_1} = 0 \quad (3)$$

для всех $k = 1, 2, \mathbf{L}, n$, т.е., на концах интервала положения фиксированы. В этом случае, мы избегаем необходимости варьирования начала t_0 и конца t_1 вариационной сессии. Вариационный интеграл (2) сводится теперь только к вариации функции Лагранжа:

$$\int_{t_0}^{t_1} dL(q_1, \mathbf{L} q_n; \mathbf{\dot{q}}_1, \mathbf{L} \mathbf{\dot{q}}_n; t) dt = 0. \quad (4)$$

Виртуальная вариация, d , отличается от бесконечно малого приращения d какой-либо функции тем, что здесь вариация затрагивает изменение функции как целостного объекта (смотри Рисунок 1), тогда как бесконечно малое приращение изменяет функцию локально, т.е., приращение независимой переменной в окрестности точки, где оно приложено.

Вариационное исчисление рассматривает виртуальное бесконечно малое изменение функции $L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$. Вариация dL означает произвольное бесконечно малое изменение значения L при фиксированных значениях \vec{q} и $\dot{\vec{q}}$. Независимые переменные не принимают участия в процессе варьирования [Ланцош, 1968]. Результатом варьирования является функция $L' = L'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$, предлагающая новый путь от начальной точки в конечную, который незначительно отличается от первоначального пути, Рис. 1. По идее, здесь предполагается наличие «разума», способного оценить задачу в целостной совокупности. Материальное тело (движущийся по какой-либо ландшафтной поверхности шар, например) не может оценить свое движение, так как монада, представляющая это тело, находится в состоянии глубокого сна, согласно представлению Лейбница. Однако, мы знаем из опыта, тело, предоставленное самому себе, движется по оптимальной траектории, которая может быть предсказана «разумом», стоящим над этой задачей. Далее мы вернемся к этой задаче и обсудим ее с позиций случайного поиска с самообучением.

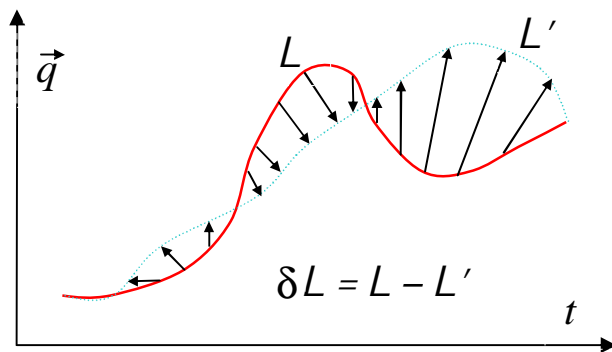


Рисунок 1

Функции $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ и $L'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ относятся к двум разным траекториям, представленным в конфигурационном пространстве. Исходная траектория, красная кривая, отвечает первой функции. Возмущенная траектория, синяя кривая, представляет вторую функцию. Черными стрелками отмечено возмущение красной кривой, как целостного объекта.

А сейчас продолжим варьирование выражения (4). Выделим одну из переменных, q_k , и будем варьировать только по ней. Остальные переменные при этом пусть остаются неизменными. Тогда выражение (4) можно расписать в следующем порядке

$$\int_{t_0}^{t_1} dL(q_1, \mathbf{L} q_n; \mathbf{\Phi}_1, \mathbf{L} \mathbf{\Phi}_n; t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{\Phi}_k} d\mathbf{\Phi}_k \right) dt. \quad (4a)$$

Второе подынтегральное выражение не годится для дальнейшего анализа, так как q_k и $\mathbf{\Phi}_k$, хотя и являются взаимосвязанными параметрами, эту взаимосвязь нельзя записать в алгебраической форме. С целью обойти это препятствие, воспользуемся известной формулой интегрирования по частям [Wikipedia, (IP), 2008]

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) \cdot g'(t) dt = f(t) \cdot g(t) \Big|_{t=t_0}^{t=t_1} - \int_{t_0}^{t_1} f'(t) \cdot g(t) dt.$$

В согласии с этой формулой, второе подынтегральное выражение может быть расписано в следующем порядке

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{\Phi}_k} d\mathbf{\Phi}_k \right) dt = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{\Phi}_k} dq_k \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{\Phi}_k} \right) dq_k dt. \quad (4b)$$

Первый член в полученном выражении выпадает, так как вариация выполняется при граничных условиях с фиксированными концами (3). В результате (4а) принимает вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) dq_k dt = 0. \quad (5)$$

Так как dq_k есть отличная от нуля бесконечно малая вариация, выражение, записанное в скобках, обращается в нуль на всем интервале от t_0 до t_1 . Таким образом, задача поиска стационарного значения интеграла J при произвольных вариациях по q_k решена. Условия стационарности гарантируются следующей системой уравнений:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Эти уравнения называются дифференциальными уравнениями Эйлера-Лагранжа, а когда они встречаются в приложениях к механике известны как уравнения движения Лагранжа.

2.1. Канонические уравнения движения. Дуальные преобразования Лежандра

Функция Лагранжа $L = L(\dot{q}, \dot{q}, t)$ является квадратичной по скоростям. Гамильтон обнаружил замечательное преобразование, приводящее к линейной зависимости по скоростям, но ценой удвоения количества уравнений движения. Вместо скорости тела, \dot{q} , в уравнения движения вводится и приобретает самостоятельное значение импульс \dot{p} . Так, вместе с этим, возникает новая функция - функция Гамильтона $H = H(\dot{q}, \dot{p}, t)$, которая является суммой кинетической T и потенциальной U энергий. Данная функция связана с функцией Лагранжа посредством дуальных преобразований Лежандра (*Legendre, 1752-1833*). Дуальные преобразования, в конкретном приложении к механической системе, представляются следующей таблицей [Ланцош, 1968]:

Таблица 1.

| Старая система | | Новая система |
|---|----------------------|-------------------------------------|
| Лагранжиан L | ← функция → | Гамильтониан H |
| Скорости $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n\}$ | ← переменные → | Импульсы $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ |
| Координаты и время | пассивные переменные | Координаты и время |

Дуальные преобразования выражаются в следующем нижеприведенном виде:

| | | |
|--|--------------------------|--|
| $L = L(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t)$ | \Leftrightarrow | $H = H(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n; t)$ |
| (1.a) $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ | \Leftrightarrow (1) | (1.b) $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ |
| (2.a) $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ | \Leftrightarrow (2) | (2.b) $L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H$ |

Функция Лагранжа, как было замечено ранее, представляется разностью кинетической и потенциальной энергий: $L = T_K - U$, а функция Гамильтона их суммой: $H = T_K + U$. Это следует из второй строки дуальных преобразований

$$L = 2T_K - H = 2T_K - (T_K + U) = T_K - U. \quad (7)$$

Удвоенное значение кинетической энергии, $2T_K$, представлено скалярным произведением $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_n q_n$. Здесь $\mathbf{p} = m\mathbf{q}$ - есть импульс динамической системы, а m - ее масса покоя. Подставляя выражение (1.a) из таблицы дуальных преобразований в уравнение (6), находим, вместе с выражением (1.b), канонические уравнения Гамильтона

$$\dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (8)$$

Замечательно то, что здесь производные по времени фигурируют только в левых частях уравнений, а функция Гамильтона зависит только от координат q_i и импульсов p_i , но не содержит производных от этих переменных. Эти уравнения описывают движения в фазовом пространстве $S^{2n} = \{q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n\}$ - пространство, которое имеет размерность в два раза большую, чем размерность обычного координатного пространства $S^n = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. Графические изображения в этом удвоенном пространстве более информативны, чем изображения в координатном пространстве.

Фазовые потоки, изображаемые в фазовом пространстве S^{2n} , показывают целостную картину поведения динамической системы, где каждая, отдельно взятая траектория, описывает динамику системы, с заданным изначально вполне определенным начальным условием. Для большей полноты представления фазовых потоков к фазовому пространству добавляется еще одно измерение - время t , в качестве еще одной $(2n+1)$ -й координаты, смотри Рисунок 2. Здесь весь поток восходит по временной оси в будущее, разворачивая сложную картину фазового портрета. Хотя уравнения классической механики обратимы во времени, здесь отсутствуют траектории, имеющие на каких-то участках отрицательные производные по t , т.е., направленные в прошлое. Однако, если изменить направления стрелок на этом рисунке на обратные, это поведение не войдет в противоречие с описанием вариационной механики - такое обратное движение тоже допустимо, пока не принимается во внимание рассеяние энергии на тепло из-за трения. Фазовые потоки ведут себя подобно несжимаемой жидкости - произвольная область, очерченная в этом потоке, может менять свою форму, но сохраняет свой объем.

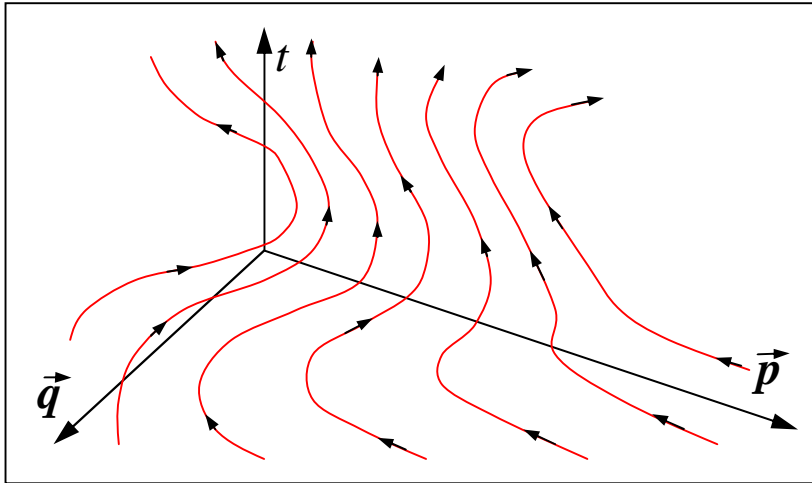


Рисунок 2

Фазовые потоки, изображаемые в фазовом пространстве S^{2n} , демонстрируют целостное поведение динамической системы, в зависимости от выбора начальных условий. Геометрическая картина может выглядеть значительно полнее, если дополнить пространство S^{2n} еще одной $(2n+1)$ -ой координатой – временем t .

В задачах классической физики упомянутым тепловым рассеянием пренебрегают из-за незначительности потерь - все фазовые траектории лежат на поверхности равной энергии

$$H(q_1, q_2, \mathbf{L}, q_n; p_1, p_2, \mathbf{L}, p_n; t) = E. \tag{9}$$

2.2. Уравнения Гамильтона-Якоби

После того как получен принцип наименьшего действия через вариацию функционала (1), мы вычислим теперь его полную производную по t :

$$\frac{dJ}{dt} = L(q_1, q_2, \mathbf{L}, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \mathbf{L}, \dot{q}_n; t). \tag{10}$$

Полная производная не предполагает, что по остальным переменным $\{q_1, q_2, \mathbf{L}, q_n\}$ ³ функционал остается неизменным. Поэтому полная производная должна быть расписана через набор частных производных [Wikipedia, (TD), 2008]

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{dq_i}{dt} \frac{\partial J}{\partial q_i} = \frac{\partial J}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla J). \tag{11}$$

Подставим это выражение в уравнение (10) и изменим знаки на обратные перед всеми членами

$$-\frac{\partial J}{\partial t} = (\mathbf{v} \cdot \nabla J) - L. \tag{12}$$

Здесь $\mathbf{v} = \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \mathbf{L}, \dot{q}_n\}$ - скорость сдвига, обусловленная бесконечно малым приращением dt , а оператор

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} + \mathbf{L} + \frac{\partial}{\partial q_n}$$

является оператором градиента в n -мерном конфигурационном пространстве S^n . Сравнивая правую часть данного выражения с (2.а), выписанным в Таблице 1, находим, что ∇J представляет импульс

$$\nabla J = \dot{p}. \tag{13}$$

³ В лагранжевой системе вся динамика системы рассматривается в координатном пространстве, поэтому скорости $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \mathbf{L}, \dot{q}_n\}$ являются зависимыми от $\{q_1, q_2, \mathbf{L}, q_n\}$.

В результате получаем уравнение

$$-\frac{\partial J}{\partial t} = H(q_1, q_2, \mathbf{L}, q_n; p_1, p_2, \mathbf{L}, p_n; t), \quad (14)$$

известное в литературе как уравнение Гамильтона-Якоби, а J называется *производящей функцией (действием)*. Так как $H = T_K + U$, имеет смысл далее расписать это уравнение, подставляя кинетическую и потенциальную энергии

$$T_K = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n p_i^2 = \frac{1}{2m} (\nabla J)^2 \quad \text{и} \quad U = U(q_1, q_2, \mathbf{L}, q_n) \quad (15)$$

в гамильтониан (14). В результате получаем явную форму уравнения Гамильтона-Якоби

$$-\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n p_i^2 + U(q_1, q_2, \mathbf{L}, q_n). \quad (16)$$

Это уравнение примечательно тем, что оно полностью описывает движение фазового потока, как несжимаемой жидкости, посредством одной функции - производящей функции J , которая определяет все движение фазовых потоков на поверхности равной энергии (9), подчиняясь лишь одному уравнению в частных производных.

Физическая интерпретация решений уравнения Гамильтона-Якоби (16), опираясь на эйкональное приближение распространения световых лучей, обнаруживает большую аналогию между оптическими лучами и механическими траекториями, см. Рисунок 3.

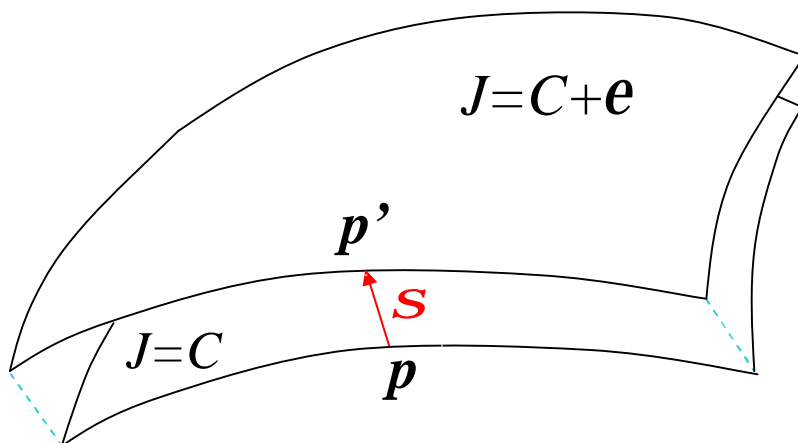


Рисунок 3

Поверхность $J = C$ испытывает малый сдвиг S и переходит к новому положению $J = C + e$. Здесь C является произвольной константой, а p и p' - точки, лежащие на этих поверхностях. Направление сдвига, нормальное к поверхности (изображенное красной стрелкой), совпадает с градиентом ∇J функции J .

Пусть в n -мерном пространстве S^n задана функция J . Градиент ∇J имеет направление, нормальное к этой поверхности. Рассмотрим две близкие поверхности, $J = C$ и $J = C + e$, Рисунок 3. Они отстоят друг от друга на малую величину S . Отношение этих малых величин, e и S , определяют градиент сдвига. Так как импульс $\dot{p} = \nabla J$ ориентирован по касательной к траектории движения, мы имеем следующее утверждение – механическая траектория движущейся точки перпендикулярна к поверхностям $J = Const$. Теперь если представить поверхность $J = C$ как волновой фронт оптической волны, сдвиги этой поверхности будут симулировать распространение волнового фронта в эйкональном приближении. Лучи в каждой точке перпендикулярны к поверхностям постоянной фазы.

2.3. Перспективы Гамильтоновой механики

Уравнения классической физики находят широкое применение не только в задачах самой физики, но как обнаружилось в последнее время, уравнения Гамильтона-Якоби возникают в самых неожиданных областях. Этому способствовала работа Беллмана (*Richard Bellman, 1920-1984*), посвященная динамическому программированию [Bellman, 1957]. Благодаря этой работе значительно расширены горизонты приложений, теперь уже уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана, начиная от задач робототехники, машин с искусственным интеллектом [LaValle, 2006], и вплоть до проблемных задач макроэкономики [Sargent, 1987]. В данных задачах функционал J чаще всего называется как *цена, стоимость (cost)*. А минимизация функционала J - это минимизация цены, или затрат.

Представим современный конвейер и вереницу роботов, собирающих сложный продукт. Робот должен совершать массу манипуляций при минимуме энергопотребления и максимуме отдачи. При этом робот должен избегать тупиковых ситуаций и «ловушек» и быть способным в перспективе к переналадке для новой деятельности [LaValle, 2006]. Сложно предвидеть всевозможные ситуации в результате эксплуатации робота, поэтому теоретические модели, позволяющие проиграть эти ситуации, значительно облегчают разработку роботов. Перед коммерческими фирмами стоят задачи минимизации рисков при максимуме прибыли. Здесь также теоретические модели рынка, опирающиеся на уравнение Беллмана, позволяют заранее обыгрывать возможные ситуации.

В перечисленных задачах, как правило, хорошо известны цели и желания. Проблема в том, как их реализовать, из каких начальных установок подходить к реализации целей и какими ресурсами владеет исполнитель в процессе реализации. В этом смысле, здесь стоит обратная задача при минимизации функционала (1), т.е., известна финальная цена C , записана как константа в уравнении (1), задача – найти стартовые позиции. По этой причине в динамическом программировании задача решается “вспять во времени” – начиная от конечного времени t_1 , переходят к предшествующему моменту $t_1 - \Delta t$, и вплоть до начального состояния при $t_0 = 0$ [King, 2002; Ferrari & Stenger, 2004].

Наблюдательный читатель может заметить, что здесь отсутствует одна трудноуловимая категория, затрагивающая тонкие проблемы морали, нравственности, порядочности, добродетели (и антиподы – алчность, корысть, и прочие негативы). В Искусственном интеллекте, если он реально будет создан, упомянутая категория может проявляться, вероятно, в форме фазовых сдвигов при принятии решений. Однако вернемся к делу.

3. Экспериментальный практикум

Пусть философы разбираются с монадами, спящими монадами, и прочими философскими задвижками, а мы начнем бросать камни, т.е., займемся экспериментом⁴. Для этого нам потребуется ряд измерительных инструментов - линейка, отмеряющая путь в единицах длины, а также хронометр (часы), фиксирующий порядок изменений, происходящих в окружающей среде. Если линейка не вызывает вопросов – это может быть, проложенная вдоль желоба, веревка с завязанными узелками, отмеряющими длину в условных

⁴ Настоящим делом займемся, товарищи. В смутной дымке времени уже маячит будущее изобретение метательного устройства, способного поражать мамонта или бизона с расстояния, превышающего опасное сближение с ним. В результате, племя приобретет значительное подспорье в добыче пропитания.

единицах - футах, локтях, метрах, или в попугаях. То с хронометром не все так просто. Его назначение – отсчитывать единицы, соединяющие прошлое через настоящее с будущим. Первобытный предок мог бы обратиться с этой целью к образам ползущей черепахи, шагающего соплеменника, скачущей лани. По мнению эскулапа в области искусственного интеллекта, это - система с памятью, смотри по этому поводу весьма интересную статью “Дежавю” [Муравинец, 2008]. Очевидно, выше перечисленные образы представляют не вполне надежный инструмент для фиксации событий. Более надежным, для этой цели, инструментом являются, например, песочные часы, отсчитывающие ход событий, пока песок пересыпается с верхней колбы в нижнюю. Их надо регулярно переворачивать. К этой работе можно подключить обезьянку из мультфильма «38 попугаев». Ну а мы можем обратить внимание, что в отличие от черепах, людей и ланей, эти часы всегда на месте. При этом они всегда пребывают в движении, пока обезьянка не забывает их опрокидывать. Циклическое движение – вот эталон времени, смотри по этому поводу детальные обзоры Полуяна [2002, 2005]. А мы пойдем дальше.

Начнем, уподобляясь первобытному предку, с первого попавшего под руку камня (выберем за основу обсидиан⁵). При первой же попытке бросания камня обнаруживается, что камень не очень-то и желает двигаться по теоретически вычисленной траектории. Перекатываясь с боку на бок, его движение только отдаленно напоминает вычисленную траекторию. Скорее всего, мы не вполне удачно выбрали камень. Предлагается слегка обтесать его угловатости. После этого его движение стало лучше походить на вычисленную траекторию. Но это движение еще далеко не соответствует теоретически предсказанному. Поэтому, работу по шлифовке поверхности камня следует продолжить. В результате упорного труда получим камень, который довольно сносно повторяет вычисленную траекторию. Этот отшлифованный предмет, как оказалось, имеет форму шара. Словосочетание «довольно сносно» означает, что существует, тем не менее, некоторая погрешность между вычисленной траекторией и реальной траекторией камня-шара. Скорее всего, поверхность камня-шара содержит неровности (все-таки до чего сложно обрабатывать обсидиан), оказывающие возмущения при его движении вдоль по наклонному желобу. Дальнейшая шлифовка поверхности уже мало, чем помогает. Однако, придание идеальной поверхности не есть выход из положения. Более того, незначительная шероховатость, оказывается, является неизбежной платой для поддержания движения камня по оптимальной траектории. Здесь мы вынуждены признать наличие сухого трения - контакт шероховатых поверхностей при движении предмета представляет, вместе с тем, естественный источник шума⁶, корректирующий движение. Давайте попытаемся построить модель такого движения.

3.1. Случайный поиск с самообучением

Выкладки в этом параграфе не претендуют на математическую строгость, но носят скорее эвристический характер. Начнем с утверждения, что переход тела, локализованного в окрестности точки, в окрестность соседней точки $\dot{q}(t+dt)$ случается с вероятностью $P(\dot{q}(t+dt), \dot{q}(t); \bar{q}_1, S_1, \bar{q}_2, S_2, \mathbf{L})$. Единичный акт перехода из окрестности точки $\dot{q}(t)$ в окрестность соседней точки $\dot{q}(t+dt)$ описывается Марковским процессом:

⁵ Вулканическое стекло с большим содержанием кремнезема, SiO_2 , обычно 70% и больше. Первобытный человек изготовлял из него, для повседневного использования, скребки, ножи, наконечники для стрел. А аккуратно отколотые пластины из обсидиана использовались в качестве зеркал модницами каменного века.

⁶ Шум может быть услышан, если параллельно с движением шара движется чувствительный микрофон, сигнал с которого подается на усилитель.

$$p(\dot{q}(t+dt)) = P(\dot{q}(t+dt), \dot{q}(t); \bar{q}_1, s_1, \bar{q}_2, s_2, \mathbf{L}) \cdot p(\dot{q}(t)). \quad (17)$$

А переходы по всему пути $\mathbf{L} \rightarrow \dot{q}(t) \rightarrow \dot{q}(t+dt) \rightarrow \mathbf{L}$ представляют цепь Маркова. Здесь $p(\dot{q}(t))$ есть вероятность обнаружения движущегося тела в точке \dot{q} в момент времени t . В свою очередь, параметры $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \mathbf{L}$ и s_1, s_2, \mathbf{L} являются параметрами настройки переходной вероятности. Они могут подвергаться изменениям, по мере того как тело движется вдоль пути, пересекая некоторый ландшафт. Смотри условный Рисунок 4. На этом рисунке красными стрелками изображено движение тела по некоторому случайному маршруту. На каждом последующем шаге иницируется генератор случайных чисел. Этот генератор воспроизводит следующий случайный сдвиг, с некоторым дисперсным допуском s (допуск выделен голубыми окружностями на рисунке) вокруг заданного математического ожидания \bar{q} - толстая зеленая линия со сферическим концом. Начало этой линии привязано к конечному положению движущегося тела.

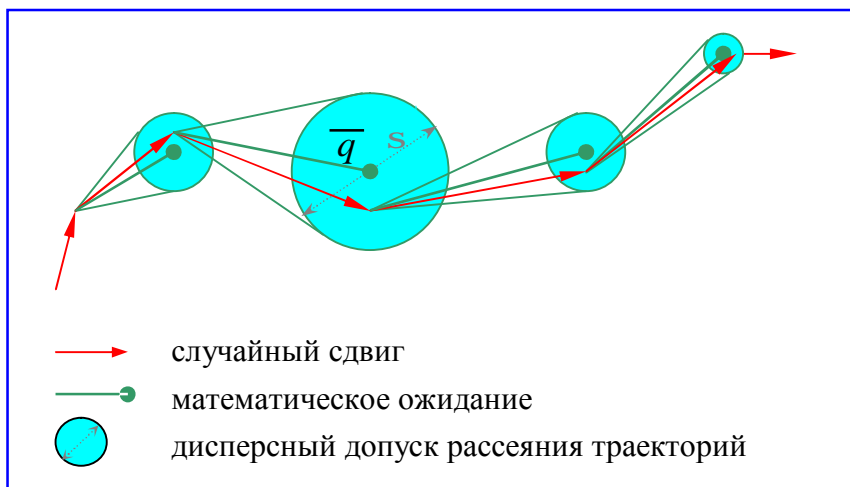


Рисунок 4

Случайная траектория динамической системы по рельефной местности показана красными стрелками. На каждом шаге происходит самокоррекция через настройку математического ожидания и дисперсии генератора случайных чисел, в зависимости от рельефа местности.

Настройка этих параметров реализуется посредством алгоритма самообучения. По сути, идея алгоритма довольно прозрачна [Растрин, 1969, 1979] - случай здесь играет решающую роль, поставляя разные шансы на выбор. Цена выбора, заложенная в настраиваемые параметры $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \mathbf{L}$, и s_1, s_2, \mathbf{L} , определяет оптимальную траекторию движения. Изначально полагается, что рельеф местности не очень известен. По мере случайных блужданий система шаг за шагом осваивает территорию.

В случайном поиске будем применять генератор случайных чисел с нормальным распределением [MathWord, (ND), 2008]

$$p(x) = \frac{1}{Z} \exp \left\{ -\frac{(x-m)^2}{2s^2} \right\}. \quad (18)$$

Здесь $Z = s \sqrt{2p}$ - статистическая сумма. Полагается, что изначально ландшафт $U(x)$ не известен. Задача сводится к поиску глобального минимума и обнаружения кратчайшего пути к нему. Нормальное распределение предоставляет равноправный выбор любых направлений в пространстве состояний. Поэтому вначале все направления равновероятны. Далее включается механизм поощрений и наказаний выбранных направлений. Направление, приводящее к понижению цены поиска (повышению функции качества [Растрин, 1979]), поощряется – представляется больше шансов двигаться в заданном

направлении. И наоборот, направление, приводящее к повышению цены поиска, теряет шансы еще раз быть выбранным. Таким образом, случайный поиск с самообучением представляет задачу случайного блуждания с выработкой оптимального направления дрейфа по мере того, как ландшафт становится все более известным.

3.2. Немного математики

Здесь не станем углубляться в утонченные проблемы случайного поиска с самообучением, чтобы не погрязнуть в деталях. Но выпишем первый эвристический шаг:

- Переходную вероятность $P(\dot{q}(t+dt), \dot{q}(t); \bar{q}, \mathbf{s})$ запишем так же, как это делается в статистической физике [Hill, 1986; Wikipedia, (SM), 2008],

$$P(\dot{q}(t+dt), \dot{q}(t); \bar{q}, \mathbf{s}) = \frac{1}{Z} \exp \left\{ \frac{-\frac{m}{s^2} \sum_i \frac{(q_i(t+dt) - \bar{q}_i)^2}{2s_i^2} - U(\dot{q}(t))}{kT} \right\}. \quad (19)$$

Здесь Z - статистическая сумма, гарантирующая, что интеграл от $P(\dot{q}(t+dt), \dot{q}(t); \bar{q}, \mathbf{s})$ по всему пространству состояний S^n равен единице. В последующих математических выкладках статистическая сумма будет записываться в форме $Z = \exp\{U_0 / kT\}$, где U_0 есть некоторая константа. Числитель в экспоненте имеет размерность энергии. Чтобы аргумент экспоненты оставался безразмерным, в знаменатель вводится член kT , где $k = 1.38065 \times 10^{-23}$ [J/K] и T есть постоянная Больцмана и температура тела и среды, соответственно. Этот член имеет размерность энергии. Здесь впервые появляется температура. В задачах классической механики она, как таковая отсутствует. Подразумевается, однако, что движения всегда происходят при комнатной температуре, $T \sim 300 \text{ K}^0$. Иными словами, неявно введен “тепловой резервуар”, в который погружена динамическая система. Пока классическая механика имеет дело с макроскопическими тележками, шарами, и другими самодвижущимися устройствами, отсутствие параметра kT не играет роли. Но для робота, размеры которого могут быть соизмеримы с размерами молекул, температур среды уже становится критичной. Чтобы образно представить эти проблемы, достаточно вообразить жизнь в местности, в которой регулярно случаются оползни, камнепады, непредсказуемые землетрясения.

В числителе аргумента экспоненты, который также имеет размерность энергии, представлено два члена. Член $U(\dot{q}(t))$ характеризует ландшафт местности, по которой движется тело, и представляется аналогом потенциальной энергии. Первый же член

$$T_K(\dot{q}(t+dt)) = \frac{m}{s^2} \sum_i \frac{(q_i(t+dt) - \bar{q}_i)^2}{2s_i^2} \quad (20)$$

является характеристикой нормального распределения вероятностей. Здесь случайная непрерывная величина q_i распределена нормально с центром \bar{q}_i и дисперсией s_i^2 . Чтобы чрезмерно не усложнять картину, будем полагать, что шум среды является изотропным, т.е., $s_1 = s_2 = \mathbf{L} s_N = s$. Однако, индексы при s будем удерживать, подчеркивая тем

самым принадлежность к координате q_i . Озвученное выше предположение окажется существенным в последующем, когда возникнет потребность определить приращение времени Δt . В случае анизотропного шума мы вынуждены были бы определять разные приращения времени для разных направлений. Такая общая постановка проблемы значительно усложнила бы поставленную задачу [Chung & Zambrini, 2003].

Обе величины, как $(q - \bar{q})$ так и s , имеют размерность длины. И поэтому их отношение безразмерно. Чтобы член T_K имел бы размерность энергии, мы умножаем это отношение на размерный множитель m/s^2 . Здесь m - масса тела, а s имеет размерность [sec/meter]. Казалось бы, естественно взять множитель mc^2 , где c - скорость света, и не было бы проблем. Но c уместна при релятивистских скоростях, тогда как здесь мы имеем дело с движениями много меньшими скорости света. Предлагается взять другую константу

$$s = 4pe_0 \frac{\hbar}{e^2} \approx \frac{137}{c} \approx 4.57 \times 10^{-7} \text{ s} \cdot \text{m}^{-1}, \quad (21)$$

представляющую размерную единицу континуума время-пространство, физическую суть которого раскрывает Полуян в своих работах [2002, 2005]. Здесь $\hbar \approx 1.05757 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ является постоянной Планка, $e \approx -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ представляет электрический заряд, а $\epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{m}^{-3}$ - диэлектрическая проницаемость вакуума. Здесь не будем затрагивать интереснейшую тему, поднятую Полуяном, отметим только, что s в данном случае играет связующую роль, обеспечивая члену T_K размерность энергии.

- Выдвинем следующее утверждение: пусть дисперсия S , помноженная на константу s , представляет средневзвешенное приращение времени Δt :

$$s \cdot S = \Delta t. \quad (22)$$

Давайте устремим теперь S к нулю. В этом случае, функция нормального распределения стремится к d -функции, оккупируя площадь вблизи точки \bar{q} . По сути, мы устремляем интенсивность шума к нулю, но в этом случае $\Delta t \rightarrow dt \rightarrow 0$ и выражение (19) теперь приводится к форме⁷

$$T_K(\mathbf{q}(t)) = \frac{m}{2} \sum_i \left(\frac{dq_i}{dt} \right)^2 = \sum_i \frac{m \dot{q}_i^2}{2} = \frac{1}{2m} \sum_i p_i^2. \quad (23)$$

Теперь видно, что этот член является кинетической энергией, а в числителе экспоненты возникает функция Гамильтона $H = T_K + U$, деленная на kT . Маршрут, изображенный красными стрелками на Рисунке 4, сводится к пути вдоль математических ожиданий. И при $dt \rightarrow 0$ этот путь становится непрерывной дифференцируемой линией, лежащей на поверхности равных энергий.

⁷ При случайных блужданиях отношение $\Delta q / \Delta t$, строго говоря, лишена смысла, так как величина Δq является флуктуирующей. Но отношение $(\Delta q)^2 / (\Delta t)^2$ имеет определенное значение [Wikipedia, (ITO), 2008].

- Формула (17) описывает единичный акт перехода из положения $\dot{q}(t)$ в новое положение $\dot{q}(t+dt)$. Давайте теперь оценим переход из начального положения $\dot{q}(0)$ в конечное положение $\dot{q}(t+dt)$. При каждом приращении dt реализуется один случайный переход с вероятностью $P(\dot{q}(t+dt), \dot{q}(t))$. Мы вынуждены теперь принимать во внимание всевозможные переходы. Образно говоря, на Рис. 4 следовало бы нарисовать ветвистое дерево из красных стрелок, растущее из начального узла $\dot{q}(0)$. А по сути, все эти возможности описываются посредством сверток переходных вероятностей:

$$\begin{aligned}
 p(\dot{q}(t+dt)) &= \int_{\forall S^N} P(\dot{q}(t+dt), \dot{q}(t)) P(\dot{q}(t), \dot{q}(t-dt)) d\dot{q}(t) \cdot p(\dot{q}(t-dt)) \\
 &= \iiint \mathbf{L} \int \prod_{j=0}^M P(\dot{q}(t_j+dt), \dot{q}(t_j)) d\dot{q} d\dot{q} \mathbf{L} d\dot{q} \cdot p(\dot{q}(0)) \quad (24) \\
 &\quad \mathbf{1} \mathbf{4} \mathbf{4} \mathbf{4} \mathbf{4} \mathbf{4} \mathbf{4} \mathbf{4} \mathbf{2} \mathbf{4} \mathbf{4} \mathbf{4} \mathbf{4} \mathbf{4} \mathbf{4} \mathbf{4} \mathbf{3} \\
 &\quad M \text{ интегралов, охватывающих все пространство } S^N
 \end{aligned}$$

Возможные переходы из положения $\dot{q}(t-dt)$ в новое положение $\dot{q}(t+dt)$ показаны в первой строке. Они могут идти через промежуточное положение $\dot{q}(t)$, реализуемое с вероятностью $P(\dot{q}(t), \dot{q}(t-dt))$. Очевидно, следует перебрать всевозможные положения $\dot{q}(t)$, которые допускаются переходной вероятностью $P(\dot{q}(t), \dot{q}(t-dt))$, т.е., нам следует выполнить интегрирование по $\dot{q}(t)$ через все пространство состояний S^N . Это же самое относится к многомерному интегрированию, если рассматривается цепочка, состоящая из M -промежуточных звеньев. Здесь употребляется термин «возможности» вместо слова «переходы», поскольку в каждом конкретном эксперименте один и только один путь может быть реализован. Но только гигантский набор экспериментальных данных может высветить эти «возможности». При устремлении S к нулю, все эти возможности вырождаются в траекторию, воспроизводящую «спуск по градиенту». Руководствуясь эвристическими соображениями, мы опустим интегралы и представим переход от $\dot{q}(0)$ к $\dot{q}(t+dt)$ через среднее геометрическое от M произведений переходных вероятностей

$$p(\dot{q}(t+dt)) = \left(\prod_{j=0}^M P(\dot{q}(t_j+dt), \dot{q}(t_j)) \right)^{\frac{1}{M}} \cdot p(\dot{q}(0)). \quad (25)$$

Полагается, что в приведенном выражении переходные вероятности содержат члены (23) вместо (20). Прологарифмируем данное выражение и умножим все на $kT \cdot M dt$

$$\begin{aligned}
 kT \ln(p(\dot{q}(t+dt))) \cdot M dt &= kT \sum_{j=0}^M \ln(P(\dot{q}(t_j+dt), \dot{q}(t_j))) \cdot dt \\
 &\quad + kT (\ln(p(\dot{q}(t_0))) \cdot M - \ln(Z')) dt. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Последний член объединяет логарифм вероятности начального состояния, $\ln(p(\dot{q}(t_0)))$, и логарифм статистической суммы $\ln(Z')$ среднегеометрической плотности вероятности. Далее он представляется константой C . Под суммой переходную вероятность перепишем через ее экспоненциальную форму (19), с учетом замены члена (20) на (23) в пределе $dt \rightarrow 0$ и $M \rightarrow \infty$ (произведение $M dt$ является конечной величиной). Так как здесь присутствует логарифм от экспоненты, то будем сразу выписывать ее аргумент:

$$kT \ln(p(\dot{\mathbf{q}}(t+dt))) \cdot M dt = kT \sum_{j=0}^M \frac{-\sum_i \frac{m \dot{q}_i^2}{2} - U(\dot{\mathbf{q}}(t_j)) - U_0}{kT} \cdot dt + C. \quad (27)$$

В правой части данного уравнения можно сократить члены kT . А член в левой стороне уравнения представим как функционал действия, а именно $kT \ln(p(\dot{\mathbf{q}}(t+dt))) \cdot M dt = J$. Действие имеет размерность [энергия · время]. В результате от множителя kT осталась только “улыбка Чеширского Кота”. Теперь уравнение (27) может быть переписано в виде

$$J = -\sum_{j=0}^M H(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}}; t_j) \cdot dt + C \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{dt \rightarrow 0} -\int_0^t H(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}}; t) dt + C. \quad (28)$$

В пределе $dt \rightarrow 0$ и $M \rightarrow \infty$ сумма сводится к интегрированию от 0 до $t = M dt$. После дифференцирования по t , находим:

$$-\frac{\partial J}{\partial t} = H(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}}; t) = \frac{1}{2m} \sum_i p_i^2 + U(\dot{\mathbf{q}}(t)) + U_0. \quad (29)$$

С точностью до константы U_0 , здесь узнается уравнение Гамильтона-Якоби (16).

3.3. Разбор полетов

Некоторые пункты, изложенные в предыдущем параграфе, нуждаются в более детальном обсуждении, из-за их принципиальности во всей изложенной конструкции:

I). Введение константы s , см. (21), обеспечивает связь заведомо вероятностного параметра, стандартного отклонения S , с приращением во времени (22). В определении константы фигурируют диэлектрическая проницаемость вакуума ϵ_0 , электрический заряд e и постоянная Планка \hbar - все из области квантовой электродинамики. На первый взгляд это выглядит как нонсенс - привлекать данные параметры к заведомо классическим движениям. Но давайте присмотримся более пристально, например, к поверхности, по которой катится шар⁸. Смотри, например, Рисунки 5 и 6.

Контакт движущегося тела с поверхностью не является таким уж идеально гладким, как видно на Рисунок 5. При более тщательном рассмотрении обнаруживаются сложные фрактально-подобные образования, которые, собственно, и являются источниками шума - сама шероховатость в поперечном сечении выглядит случайной кривой, Рис. 6. Законы квантовой электродинамики здесь проявляются в полной мере. Эффект Казимира (*Hendrik Casimir, 1909—2000*) представляет прямое подтверждение. Суть эффекта в следующем [Lambrecht, 2002; Wikipedia, (CE), 2008], если две незаряженные металлические пластинки приблизить друг к другу на расстояние порядка нескольких микрометров, 10^{-6} m, то пластинки будут испытывать притяжение, обусловленное квантовыми флуктуациями вакуума. Причиной данного эффекта являются энергетические колебания физического вакуума из-за постоянного рождения и исчезновения в нём виртуальных частиц. Наличие константы s в выражениях (19)-(21), по этой причине, вполне уместно.

⁸ Полагается, что мы худо-бедно все-таки отшлифовали как шар, так и поверхность, по которой он катится.

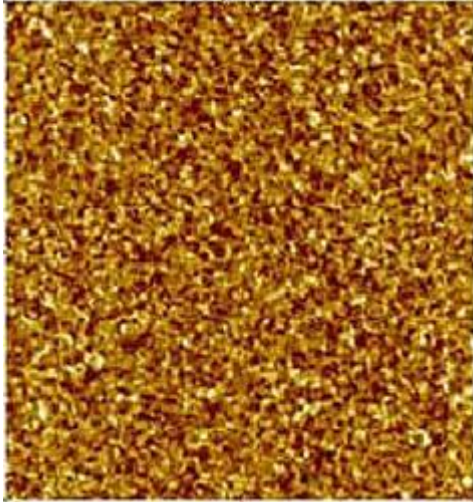


Рисунок 5

Изображение поверхности кремниевого бруска, имеющего размеры $1\text{mm} \times 1\text{mm}$. Выполнено с помощью атомного силового микроскопа [Schellenberg, 2008]. Хорошо видна текстура поверхности, составляющая по высоте порядка 6 нанометра (в поперечном срезе такая шероховатость показана на рисунке ниже).

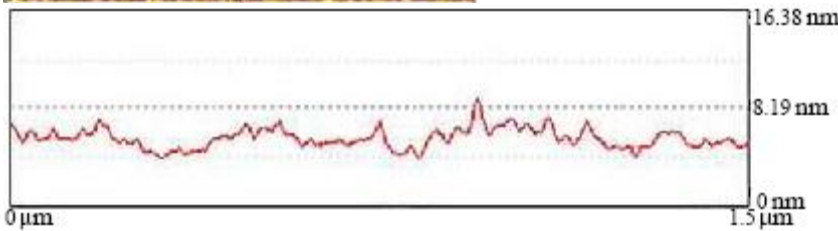


Рисунок 6

Измеренная в поперечном сечении шероховатость поверхности кремниевого образца [Schellenberg, 2008]. Амплитуда шероховатости составляет порядка 6 нм

II). Отображение

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{m}{s^2} \frac{(q(t+dt) - \bar{q})^2}{2s^2} = \frac{m}{2} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 \quad (30)$$

является важным звеном во всей вышеизложенной конструкции. Данный предел не совсем обычный. Представляется странным, чтобы случайная разность $\Delta q = q(t+dt) - \bar{q}$ описывала бы бесконечно малое приращение dq в пределе $dt = s \rightarrow 0$. Реально, в этом пределе случайное блуждание представляется Винеровским процессом, описывающим детерминированный сдвиг на величину mdt и случайный дрейф на величину $s dX(t)$:

$$dq(X(t), t) = m(t)dt + s dX(t). \quad (31)$$

Данное уравнение, стохастическое дифференциальное уравнение, описывает приращение dq , зависящее от детерминированного сдвига и подвергнутое случайному воздействию. Вне зависимости от того, каким бы малым интервал dt ни был, всегда существует малый вклад от шумового члена $X(t)$ [Vardavas, 2004; Wikipedia, (ИТО), 2008]. Данный вклад наблюдаем при достаточном увеличении разрешения кривой $q(X(t), t)$. Это говорит о том, что движение любого физического тела всегда подвергается неустранимому шуму.

III). Переход от множественной свертки переходных вероятностей (24) к их среднегеометрическому представлению (25) является эвристическим. Ценность перехода обусловлена появлением уравнения Гамильтона-Якоби в пределе $dt \rightarrow 0$ и $M \rightarrow \infty$. Их произведение, Mdt , остается конечной величиной. Среднегеометрическое представление (25), которое показало столь ценный результат при переходе к пределу $dt \rightarrow 0$ и $M \rightarrow \infty$, требует дальнейшего более основательного анализа. С этой целью рассмотрим подобный же переход в квантово-механической картине.

4. Квантово-механическая картина

Давайте теперь взглянем на квантово-механические движения в том же самом срезе – в срезе случайных блужданий квантово-механического объекта в некоторой среде, которая описывается потенциалом $U(\dot{q})$.

Истинная картина квантово-механических движений описывается уравнением Шредингера в нерелятивистском приближении довольно хорошо. Истинность решений уравнения доказана временем, и его предсказательной мощью исходов экспериментов. Данное уравнение имеет дело с волновой функцией, которая является функцией комплексных переменных. Давид Бом (*David Bohm, 1917-1992*) в работе [Bohm, 1952] показал, что уравнение Шредингера допускает расщепление на два уравнения, каждое из которых описывает поведение функций от реальных переменных. Первое уравнение является уравнением Гамильтона-Якоби, модифицированного квантовым корректором⁹. А второе уравнение есть уравнение непрерывности квантовой плотности вероятности $r(\dot{q}, t)$. Следует отличать эту плотность вероятности от описываемой ранее, $p(\dot{q}(t))$. Квантовая плотность вероятности имеет дело с сущностями, происходящими на уровне вакуума. Однако, здесь мы не будем фантазировать на тему, что из себя представляют эти сущности, но займемся математическими выкладками, так же носящими, в значительной мере, эвристический характер.

Уравнение Гамильтона-Якоби, модифицированное квантовым корректором Бома, имеет вид [Сбитнев, 2008(a), 2008(b), 2008(c)]:

$$-\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n p_i^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^n (\nabla_i S_Q)^2 + U(\mathbf{q}) + \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 S_Q. \quad (32)$$

Здесь и далее $\mathbf{p}_i = \nabla_i J$ есть импульс i -то частицы. Члены, подкрашенные фиолетовым цветом, являются квантовыми корректорами кинетической и потенциальной энергий, соответственно. Эти дополнительные члены, квадрат градиента $(\nabla_i S_Q)^2$ и лапласиан $\nabla_i^2 S_Q$ от квантовой энтропии S_Q , входят с исключительно малым весом, пропорциональным $\hbar^2 \sim 10^{-68}$. Уже отсюда следует, что данными членами, во многих случаях, можно пренебречь. И мы получаем обычное классическое уравнение Гамильтона-Якоби. По сути, это есть ни что иное, как эйкональное приближение квантово-механического движения [Ландау и Лифшиц, 1988]. Существуют ситуации, когда этого делать не стоит. Из самих членов $(\nabla_i S_Q)^2$ и $\nabla_i^2 S_Q$ видно, ими нельзя пренебрегать, когда энтропия испытывает резкие перепады при малых сдвигах в пространстве. Такие случаи имеют место в окрестности границ, где волновой фронт подвергается существенным изменениям.

Квантовая энтропия удовлетворяет уравнению баланса

$$\frac{\partial S_Q}{\partial t} + \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_i \nabla_i S_Q) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\nabla_i \mathbf{v}_i) = 0. \quad (33)$$

Это уравнение может быть переписано как уравнение непрерывности для квантовой плотности вероятности $r = \exp(-2S_Q)$, а именно

⁹ Бом назвал этот член квантовым потенциалом. Это название не вполне удачно, так как он допускает еще разложение на члены, корректирующие кинетическую и потенциальную энергии [Сбитнев, 2008(a)].

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \nabla(\mathbf{v}_i \mathbf{r}) = 0. \quad (34)$$

Здесь $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i / m = \nabla_i J / m$ есть скорость i -то частицы. Таким образом, два уравнения, модифицированное уравнение Гамильтона-Якоби (30) и уравнение непрерывности (34) квантовой плотности вероятности (или, что эквивалентно, уравнение баланса энтропии (33)), определяют вполне корректно поведение нерелятивистского квантового объекта.

Нерелятивистские квантово-механические движения, которые описываются двумя связанными уравнениями – модифицированным уравнением Гамильтона-Якоби (32) и уравнением баланса квантовой энтропии (33), можно догадываться, также могут быть описаны как случайный Марковский процесс с кардинальной модификацией переходной вероятности. Так как переходная вероятность (19) представляется функцией реальных аргументов, то кардинальная модификация подразумевает введение мнимых величин. В этом смысле, мы будем называть такую комплексную функцию переходным оператором.

4.1. Истина где-то рядом

Комплексификация переходной вероятности (19) затрагивает введение мнимых значений в положение физического объекта в реальном пространстве. Иными словами, реальное пространство координат, как бы теряет четкость и слегка уширяется в дополнительном мнимом измерении. Мнимое измерение обеспечит появление дополнительного уравнения – уравнение баланса энтропии, а также появление модифицирующих членов в уравнении Гамильтона-Якоби. Математические выкладки могут показаться отчасти спорными. Но их задача – показать, что квантово-механические нерелятивистские движения также могут представляться результатом случайного блуждания по траекториям. Появление мнимого измерения реального пространства координат есть плата за то, чтобы получить уравнения (32) и (33). Введение мнимости в переходную вероятность оправдана тем, что квантовая механика имеет дело с амплитудами вероятностей, которые являются комплексными функциями. Появление мнимости является естественным шагом в направлении, указанном Бомом.

Запишем переходную комплексную амплитуду вероятности

$$|A(q+iz; \bar{q}, s)\rangle = \frac{1}{Z} \exp \left\{ \frac{-\frac{m}{s^2} \sum_i \frac{(\Delta q_i + i\Delta_i z)^2}{2s_i^2} - U(\mathbf{q} + i\mathbf{e})}{kT} \right\}, \quad (35)$$

заведомо зная ответ (32) и (33), к которому мы желаем подойти. Здесь $\Delta_i z$ и \mathbf{e} являются мнимыми случайными сдвигами в пространстве состояний S^N динамической системы. Теперь выполним ряд вычислений:

1). Разложим квадрат

$$\begin{aligned} \frac{m}{s^2} \frac{(\Delta q_i + i\Delta_i z)^2}{2s_i^2} &= \frac{m}{2} \left(\frac{\Delta q_i}{s s_i} \right)^2 + i \frac{m}{s} \left(\frac{\Delta q_i}{s s_i} \right) \left(\frac{\Delta_i z}{s_i} \right) - \frac{m}{2s^2} \left(\frac{\Delta_i z}{s_i} \right)^2 \\ &= \frac{m}{2} \left(\frac{\Delta q_i}{\Delta t} \right)^2 + i \hbar \underbrace{\left(\frac{\Delta q_i}{\Delta t} \right) \left(\frac{\Delta_i z}{s_i} \cdot \frac{m}{\hbar s} \right)}_{(a)} - \frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{\left(\frac{\Delta_i z}{s_i} \cdot \frac{m}{\hbar s} \right)^2}_{(b)}. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь $\Delta_i z$ представляет сдвиг вдоль градиента возмущающего параметра z , т.е., z представляется неким скалярным полем. Сдвиг $\Delta t = s \cdot S$ определен ранее в (22). Размерность множителя $(m / \hbar s)$ есть обратная длина. При массе протона, $m \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, этот множитель есть $(m / \hbar s) \sim 3.5 \times 10^{13} \text{ m}^{-1}$, а в случае массы электрона, $m \approx 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, имеем $(m / \hbar s) \sim 1.9 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}$. Чем больше масса покоя, тем больше этот множитель, а следовательно, тем больше безразмерная величина

$$z \cdot \frac{m}{\hbar s}, \quad z = z(q_1, q_2, \mathbf{L}, q_N), \quad (37)$$

которая, будем полагать, имеет отношение к квантовой энтропии S_Q . Здесь ее будем обозначать, временно, как S_X . В свете сказанного, предпоследний член в уравнении (36) может быть приведен к выражению

$$(a): \quad i\hbar \sum_i \left(\frac{\Delta q_i}{\Delta t} \right) \left(\frac{\Delta_i z}{s_i} \cdot \frac{m}{\hbar s} \right) = i\hbar \sum_i (\mathbf{v}_i \cdot \nabla_i S_X). \quad (38)$$

Здесь мы уже учитываем сумму, фигурирующую в выражении (35). Скорость \mathbf{v}_i есть $\Delta \mathbf{q}_i / \Delta t$, а во вторых скобках представлен градиент энтропии S_X .

Что касается последнего члена в уравнении (36), он приводится к виду

$$(b): \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \left(\frac{\Delta_i z}{s_i} \cdot \frac{m}{\hbar s} \right)^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i (\nabla_i S_X)^2. \quad (39)$$

2). Давайте теперь рассмотрим потенциальный энергетический член $U(\mathbf{q} + i\mathbf{e})$. Здесь \mathbf{e} является малой мнимой поправкой к \mathbf{q} . Разложим этот член в ряд Тейлора до второго члена включительно

$$U(\mathbf{q} + i\mathbf{e}) \approx U(\mathbf{q}) + i(\mathbf{e} \cdot \nabla U(\mathbf{q})) - \frac{e^2}{2} \Delta U(\mathbf{q}) \mathbf{K}. \quad (40)$$

Здесь $\nabla U(\mathbf{q})$ есть градиент потенциала в точке \mathbf{q} , а $\Delta U(\mathbf{q})$ есть его лапласиан. Вектор \mathbf{e} пусть будет

$$\mathbf{e} = \hbar \frac{s}{2m} \mathbf{n}. \quad (41)$$

Здесь \mathbf{n} есть единичный вектор, $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 1$. Вектор \mathbf{e} имеет размерность длины. В случае массы протона, $m \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, имеем $(\hbar s / 2m) \sim 1.4 \times 10^{-14} \text{ m}$, а для массы электрона, $m \approx 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, эта величина есть $(\hbar s / 2m) \sim 2.6 \times 10^{-11} \text{ m}$. Таким образом, чем больше масса покоя частицы, тем тоньше слой мнимой степени свободы. Распишем разложение (40), в свете определения абсолютной величины e , более детально

$$U(\mathbf{q} + i\mathbf{e}) \approx U(\mathbf{q}) + i\hbar \left(\mathbf{n} \cdot \left(\frac{s}{2m} \nabla U(\mathbf{q}) \right) \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{s^2}{2m} \Delta U(\mathbf{q}) \right) \mathbf{K}. \quad (42)$$

В члене, охваченном скобкой (a), \mathbf{n} есть единичный вектор направления “мнимого уширения”. Сила ¹⁰, скалярно помноженная на фактор $l\mathbf{n}$, представляет элементарную работу, совершаемую силой при перемещении на длину l . Сила, скалярно умноженная на фактор $s\mathbf{n}$ и деленная на массу m , соответствует темпу скорости, изменяющейся на единице длины, т.е., представляет дивергенцию скорости $(\nabla \cdot \mathbf{v})$. Таким образом, член, охваченный скобкой (a), мы представим в следующем виде

¹⁰ Сила - градиент потенциальной энергии, $\nabla U(\mathbf{q})$, определенный с отрицательным знаком.

$$(a): \frac{s}{2m}(\mathbf{n} \cdot \nabla U(\mathbf{q})) = \frac{1}{2}(\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (43)$$

Последний член в разложении (42), член $(s^2 U(\mathbf{q}) / 2m)$, является безразмерным. Будем представлять его, как лапласиан от энтропии S_x :

$$(b): -\left(\frac{s^2}{2m} \Delta U(\mathbf{q})\right) = \Delta S_x. \quad (44)$$

3). Соберем теперь все члены - (38), (39), (43), (44), под аргумент экспоненты (35):

$$|A(q + ig; \bar{q}, \bar{g}, \mathbf{s})\rangle = \frac{1}{Z} \exp \left\{ \frac{-\frac{m}{2} \sum_i v_i^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \sum_i (\nabla_i S_x)^2 - U(\mathbf{q}) - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \Delta_i S_x}{kT} \right\} \cdot \exp \left\{ i\hbar \frac{-\sum_i (\mathbf{v}_i \cdot \nabla_i S_x) - \frac{1}{2} \sum_i (\nabla_i \cdot \mathbf{v}_i)}{kT} \right\}. \quad (45)$$

Первая экспонента содержит только реальные члены, а вторая экспонента содержит только мнимые члены. Мы обнаруживаем, числитель в аргументе первой экспоненты, с точностью до знаков, воспроизводит члены, представленные в правой части уравнения (32). А числитель аргумента второй экспоненты повторяет последние члены в уравнении (33), также с точностью до знаков.

Повторяя эвристические выкладки (24) - (27), представим переход из состояния $\mathbf{q}(0)$ в $\mathbf{q}(t+dt)$ через среднее геометрическое от M произведений переходных амплитуд

$$|z(\mathbf{q}(t+dt))\rangle = \left(\prod_{j=0}^M |A(q(t_j) + ig(t_j); \bar{q}, \bar{g}, \mathbf{s})\rangle \right)^{\frac{1}{M}} \cdot |z(\mathbf{q}(0))\rangle \quad (46)$$

в пределе $s \rightarrow 0$ и $M \rightarrow \infty$. Вычисляя логарифм от этого выражения и умножая на $kT \cdot M dt$, получаем

$$kT \ln(|z(\mathbf{q}(t+dt))\rangle) \cdot M dt = kT \sum_{j=0}^M \frac{-\frac{m}{2} \sum_i v_i^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \sum_i (\nabla_i S_x)^2 - U(\mathbf{q}) - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \Delta_i S_x}{kT} \cdot dt \quad (47)$$

$$+ kT \sum_{j=0}^M i\hbar \frac{-\sum_i (\mathbf{v}_i \cdot \nabla_i S_x) - \frac{1}{2} \sum_i (\nabla_i \cdot \mathbf{v}_i)}{kT} \cdot dt + kT (\ln(|z(\mathbf{q}(t_0))\rangle) \cdot M - \ln(Z')) dt.$$

Здесь плотность вероятности обнаружить частицу в окрестности точки $\mathbf{q}(t)$ есть $\langle z(\mathbf{q}(t)) | z(\mathbf{q}(t)) \rangle$. Член же $|z(\mathbf{q}(t))\rangle$ есть плотность амплитуды вероятности, и является, в общем случае, комплексной функцией. Объявим член $kT \ln(|z(\mathbf{q}(t+dt))\rangle) \cdot M dt = J + i\hbar S_x$ комплексным действием - теперь действие содержит мнимую составляющую, которая входит с множителем \hbar . В пределе $dt \rightarrow 0$, ($M dt = t$) перепишем уравнение (47), в такой же форме, как и уравнение (28)

$$\begin{aligned}
 J + i\hbar S_{\mathbf{x}} = & - \int_0^t \left\{ \frac{1}{2m} \sum_i p_i^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_i (\nabla_i S_{\mathbf{x}})^2 + U(\mathbf{q}) + \frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \Delta_i S_{\mathbf{x}} \right\} dt \\
 & - i\hbar \int_0^t \left\{ \sum_i (\mathbf{v}_i \cdot \nabla_i S_{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2} \sum_i (\nabla_i \cdot \mathbf{r}_i) \right\} dt + C.
 \end{aligned} \tag{48}$$

Здесь C является комплексной константой, следующей из последнего члена в уравнении (47).

Разделяя уравнение (48) на два отдельных по признаку реальные части и мнимые части, и вычисляя производные по t от этих уравнений, окончательно

$$-\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{2m} \sum_i p_i^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_i (\nabla_i S_{\mathbf{x}})^2 + U(\mathbf{q}) + \frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \Delta_i S_{\mathbf{x}}, \tag{49}$$

$$\frac{\partial S_{\mathbf{x}}}{\partial t} + \sum_i (\mathbf{v}_i \cdot \nabla_i S_{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2} \sum_i (\nabla_i \cdot \mathbf{r}_i) = 0. \tag{50}$$

Данная пара уравнений, можно видеть, в точности соответствует модифицированному уравнению Гамильтона-Якоби (32) и уравнению баланса энтропии (33), если заменить здесь члены $S_{\mathbf{x}}$ квантовой энтропией $S_{\mathbf{Q}}$.

Литература

- Bellman, R.E., [1957] *Dynamic Programming*, (Princeton University Press, Princeton, NJ)
- Bohm, D., [1952] "A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "Hidden Variables", I and II" *Physical Review*, **85**, 166-179; 180-193.
- Chung, K.L. and Zambrini, J.-C., [2003] "Introduction to Random Time and Quantum Randomness," (World Scientific, Singapore.)
- College.ru/ mathematics, [2008] "Лейбниц, Готфрид: Краткие биографические данные," in <http://www.college.ru/mathematics/courses/planimetry/content/scientist/leibniz.html>
- Ferrari, S. and Stenger, R.F., [2004] "Model-Based Adaptive Critic Designs," in *Handbook of learning and approximate dynamic programming*, ed. Si, J., Barto, A. G., Powell, W. B. and Wunsch II, D. (Wiley-IEEE, N. Y.), 65-95.
- Hill, T. L., [1986] "An introduction to Statistical Thermodynamics," (Dover Publ., Inc., N. Y.)
- King, I., [2002] "A Simple Introduction to Dynamic Programming in Macroeconomic Models", accessible in Internet, ([www.business.auckland.ac.nz/Departments/econ/workingpapers/full/](http://www.business.auckland.ac.nz/Departments/econ/workingpapers/full/Text230.pdf)), *Text230.pdf*, 1-29.
- Lambrecht, A., [2002] "The Casimir effect: a force from nothing," accessible in Internet <http://physicsworld.com/cws/article/print/9747>, **9**
- LaValle, S. M., [2006] *Planning algorithms*, (Cambridge University Press, Cambridge)
- MathWord, (ND), [2008] "Normal Distribution," accessible in Internet: <http://mathworld.wolfram.com/NormalDistribution.html>
- Sargent, T.J., [1987] *Dynamic Macroeconomic Theory*, (Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, London)
- Schellenbach, U., [2008] "Application note -Nano-Surface texture / Roughness," accessible in Internet: http://www.lot-oriel.com/site/site_down/pn_roughness_deen.pdf, 1-3.
- Vardavas, R., [2004] "Ito's Lemma," accessible in Internet: <http://www.quantnotes.com/fundamentals/backgroundmaths/ito.htm>

- Wikipedia, (CE), [2008] "Casimir effect," in http://en.wikipedia.org/wiki/Casimir_effect
- Wikipedia, (IP), [2008] "Integration by parts," *accessible in Internet:*
http://en.wikipedia.org/wiki/Integration_by_parts
- Wikipedia, (ITO), [2008] "Ito-'s lemma," in http://en.wikipedia.org/wiki/Ito_lemma
- Wikipedia, (SM), [2008] "Statistical mechanics," in *accessible in Internet:*
http://en.wikipedia.org/wiki/Statistical_mechanics
- Wikipedia, (TD), [2008] "Total derivative," in: http://en.wikipedia.org/wiki/Total_derivative
- Википедия(Лейбниц), [2008] "Лейбниц, Готфрид Вильгельм," *accessible in Internet:*
<http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B5%D0%B9%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D1%86.%D0%93%D0%BE%D1%82%D1%84%D1%80%D0%B8%D0%B4.%D0%92%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%B3%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BC>
- Доронин, С.И., [2007] *Квантовая магия*, (Весь, Санкт-Петербург,
<http://www.ppole.ru/doronin/>)
- Заречный, М., [2006] *Квантово-мистическая картина мира*, (Весь, Санкт-Петербург,
<http://www.ppole.ru/doronin/>)
- Ландау, Л.Д. and Лифшиц, Е. М., [1988] *Теория поля, том II*, (Наука, М.)
- Ланцош, К., [1968] *Вариационные принципы механики*, (Мир, М)
- Муравинец, И.Ф., [2008] "Дежавю," *Квантовая Магия*, **5(2)**, 2301-2347.
- Полуян, П.В., [2002] "НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ НЕКЛАССИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ," in <http://res.krasu.ru/non-standard/>
- Полуян, П.В., [2005] "Неклассическая онтология и неклассическое движение," *Квантовая магия*, **2(3)**, 3119-3134.
- Растрингин, Л.А., [1969] *Этот случайный, случайный, случайный мир*, (Молодая гвардия, М.)
- Растрингин, Л.А., [1979] *Случайный поиск*, (Знание, М.)
- Сбитнев, В.И., [2008(a)] "Бомовское расщепление уравнения Шредингера на два уравнения, описывающих эволюцию реальных функций," *Квантовая Магия*, **5(1)**, 1101-1111.
- Сбитнев, В.И., [2008(b)] "Бомовское расщепление уравнения Шредингера: запутанные и разделимые состояния ансамбля многих частиц," *Квантовая Магия*, **5(2)**, 2101-2111.
- Сбитнев, В.И., [2008(c)] "Спиновая частица в магнитном поле - уравнение Паули и его расщепление на два уравнения для реальных функций," *Квантовая Магия*, **5(2)**, 2112-2131.