Квантовая Магия, том 5, вып. 2, стр. 2160-2177, 2008

Bell J.S., On the Einstein Podolsky Rosen paradox (перевод с англ. - П.В.Путенихин; комментарии к выводам и оригинальный текст статьи)

(Получена 15 января 2008; опубликована 15 апреля 2008)

Перевод знаменитой статьи Д.С.Белла об ЭПР-парадоксе, а также комментарии к выводам Белла и оригинал статьи. Статья Белла явилась убедительным математико-логическим опровержением доводов Эйнштейна о неполноте квантовой механики и сформулированных им положений так называемого «локального реализма». Со дня опубликования статьи в 1964 году и до наших дней доводы Белла, более известные в форме «неравенств Белла», служат самым распространённым и главным аргументом в споре между представлениями о нелокальности квантовой механики и целым классом теорий на основе «скрытых переменных» или «дополнительных параметров».
В предлагаемой работе приводится перевод статьи Белла и комментарии к его выводам. Также приведена сама статья в оригинальном варианте. Высказаны предположения, что возражения Белла являются компромиссом между специальной теорией относительности и экспериментально наблюдаемым явлением запутанности, имеющим все видимые признаки мгновенной зависимости двух отделенных друг от друга систем. Этот компромисс известен в наши дни как нелокальность или несепарабельность. Нелокальность фактически отрицает положения традиционной теории вероятности на зависимые и независимые события и обосновывает новые положения – квантовую вероятность, квантовые правила вычисления вероятности событий (сложение амплитуд вероятностей). Подобный компромисс служит почвой для возникновения мистических взглядов на природу.

Часть 1. Перевод статьи

Сохранено форматирование оригинального текста

Physics Vol. 1, No. 3, pp. 198-200, 1964 Physics Publishing Co. Printed in the United States

ПАРАДОКС ЭЙНШТЕЙНА ПОДОЛЬСКОГО РОЗЕНА *

Д.С. БЕЛЛ[1)]
Факультет Физики, Университет Висконсина, Мэдисон, Висконсин
(Получена 4 Ноября 1964)

I. Представление

Парадокс Эйнштейна, Подольского и Розена [1] был выдвинут как аргумент того, что квантовая механика – теория не полная и в нее должны быть включены дополнительные переменные. Эти дополнительные переменные должны были вернуть в теорию причинность и локальность [2]. Отметим, что идея будет сформулирована математически и будет показано, что она несовместима со статистическими предсказаниями квантовой механики. Главную трудность создает требование локальности, означающее, что результат измерения на одной системе не может зависеть от действий на отдаленной системе, с которой она взаимодействовала в прошлом. Предпринимались попытки [3] показать, что даже без такой сепарабельности или требования локальности невозможны никакие интерпретации квантовой механики со «скрытыми переменными». Эти попытки были описаны, например, в [4] и при желании можно найти другие.

Кроме того, в [5] была явно построена интерпретация элементарной квантовой теории со скрытой переменной. Эта специфическая интерпретация в действительности имеет чрезвычайно нелокальную структуру. Согласно результату, который будет доказан здесь, это характерно для любой такой теории, которая точно воспроизводит квантово-механические предсказания.

II. Формулировка

В примере, приведенном Бомом и Аароновым [6], ЭПР-аргумент состоит в следующем. Рассмотрим пару частиц с полуцелым спином, сформированных в синглетном состоянии и движущихся свободно в противоположных направлениях. Измерения могут быть сделаны, например, с помощью магнитов Штерна-Герлаха на выбранных компонентах спина $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$. Если измерение компоненты $\vec{s}_1 \cdot \vec{a}$, где $\vec{a}$ - некоторый единичный вектор, дает значение +1, тогда, согласно квантовой механике, измерение $\vec{s}_2 \cdot \vec{a}$ должно дать значение -1 и наоборот. Теперь мы выдвигаем гипотезу [2], и это является, по крайней мере заслуживающим рассмотрения, что, если эти два измерения сделаны в отдаленных друг от друга местах, то ориентация одного магнита не влияет на результат, полученный на другом магните. Так как мы можем заранее предсказать результат измерения любой выбранной компоненты $\vec{s}_2$, предварительно измерив ту же самую компоненту $\vec{s}_1$, из этого следует, что результат любого такого измерения должен быть фактически предопределен. Так как исходная квантово-механическая волновая функция *не определяет* результата индивидуального измерения, эта предопределённость подразумевает возможность большого набора состояний.

Давайте этот большой набор состояний определим посредством параметров l. Совершенно безразлично, обозначает l единственную переменную или их набор, или даже набор функций, и являются переменные дискретными или непрерывными. Однако мы примем, что l - это единственный непрерывный параметр. Тогда результат A измерения $\vec{s}_1 \cdot \vec{a}$ зависит от $\vec{a}$ и l, а результат B измерения $\vec{s}_2 \cdot \vec{b}$ в том же самом случае зависит от $\vec{b}$ и l, и

*Работа поддержана частично Американской Комиссией по ядерной энергии

[1)] В отпуске от SLAC и CERN

$$A(\vec{a}, l) = \pm 1, B(\vec{b}, l) = \pm 1, \tag{1}$$

Главное в предположении [2] - это то, что результат B для частицы 2 не зависит от установки $\vec{a}$ магнита для частицы 1, как и A от $\vec{b}$.

Если $p(l)$ - распределение вероятности l, тогда ожидаемые значения совместного наблюдения этих двух компонент $\vec{s}_1 \cdot \vec{a}$ и $\vec{s}_2 \cdot \vec{b}$ равны

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int dl\, p(l) A(\vec{a}, l) B(\vec{b}, l) \tag{2}$$

Оно должно равняться квантово-механическому значению ожидания, которое для синглетного состояния равно

$$< \vec{s}_1 \cdot \vec{a} \vec{s}_2 \cdot \vec{b} > = -\vec{a} \cdot \vec{b}. \tag{3}$$

Однако будет показано, что это невозможно.

Кто-то может предпочесть формулировку, в которой скрытые переменные разбиты на два набора – один зависит от A, другой - от B; эта возможность содержится в вышеупомянутом случае, так как l содержат любое число переменных, вследствие чего их зависимости от A и B неограниченны. В полной физической теории типа предусмотренной Эйнштейном скрытые переменные могли бы иметь динамические значения и законы движения; наш набор l в этом случае можно представить как начальные значения этих переменных в некоторый соответствующий момент.

III. Иллюстрация

Доказательство основного результата чрезвычайно просто. Однако, прежде чем представить его, рассмотрим перспективу в виде нескольких иллюстраций.

Во-первых, не трудно принять, что при измерении спина отдельной частицы, он считывается из скрытой переменной. Предположим, что мы имеем спин половина частицы в чистом спиновом состоянии с поляризацией, обозначенной единичным вектором $\vec{p}$. Возьмём в качестве скрытой переменной (для примера) единичный вектор $\vec{l}$ с однородным распределением вероятности на полусфере $\vec{l}\cdot\vec{p} > 0$. Зададим, что результат измерения компоненты $\vec{s}\cdot\vec{a}$

$$\operatorname{sign} \vec{l}\cdot\vec{a}' \tag{4}$$

где $\vec{a}'$ - единичный вектор, зависящий от $\vec{a}$ и $\vec{p}$ как описано, и функция sign, равная +1 или -1 в зависимости от значения ее аргумента. Фактически это приводит к неопределенному результату, когда $l\cdot a' = 0$, но, поскольку вероятность этого - ноль, мы не будем делать специальных указаний на это. В среднем по $\vec{l}$ ожидаемое значение составляет

$$<\vec{s}\cdot\vec{a}> = 1 - \frac{2q'}{p}, \tag{5}$$

Где q' - угол между $\vec{a}'$ и $\vec{p}$. Предположим теперь, что $\vec{a}'$ получено из $\vec{a}$ вращением к $\vec{p}$ до

$$1 - \frac{2q'}{p} = \cos q \tag{6}$$

где q - угол между $\vec{a}$ и $\vec{p}$. Тогда мы имеем желательный результат

$$<\vec{s}\cdot\vec{a}> = \cos q\ , \tag{7}$$

Итак, в этом простом случае не составляет труда представить, что результат каждого измерения определен значением дополнительной переменной, и что статистические особенности квантовой механики соблюдаются, поскольку значение этой переменной в индивидуальных случаях неизвестно.

Том 1, №3 ПАРАДОКС ЭЙНШТЕЙНА ПОДОЛЬСКОГО РОЗЕНА 197

Во-вторых, нет никакой трудности в воспроизведении в форме (2) единственной особенности (3), как это обычно делается в устных обсуждениях этой проблемы:

$$\left.\begin{array}{l} P(\vec{a},\vec{a}) = -P(\vec{a},-\vec{a}) = -1 \\ P(\vec{a},\vec{b}) = 0 \quad \text{при} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \end{array}\right\} \tag{8}$$

Например, пусть теперь l - это единичный вектор $\vec{l}$ с однородным распределением вероятности по всем направлениям, и примем

$$\left.\begin{aligned} A(\vec{a},\vec{\lambda}) &= \operatorname{sign}(\vec{a}\cdot\vec{\lambda}) \\ B(a,b) &= -\operatorname{sign}(\vec{b}\cdot\vec{\lambda}) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Это дает

$$P(\vec{a},\vec{b}) = -1 + \frac{2}{\pi}\theta\ , \tag{10}$$

где θ - угол между a и b, и (10) имеет свойства (8). Для сравнения, рассмотрим результат модификации теории [6], в которой чистое синглетное состояние заменяется со временем изотропной смесью состояний; это дает функцию корреляции

$$-\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} \tag{11}$$

Видимо, экспериментально намного проще найти отличие (11) от (3), чем (10) от (3).

В отличие от (3), функция (10) не постоянна в точке минимума –1 (в θ = 0). Похоже, что это характерно для функций типа (2).

В-третьих, и в заключение, нет никаких трудностей в воспроизведении квантово механической корреляции (3), если позволить результатам A и B в (2) зависеть от $\vec{b}$ и $\vec{a}$ и, соответственно, также от $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Например, заменим $\vec{a}$ в (9) на $\vec{a}'$, полученный из $\vec{a}$ вращением к $\vec{b}$

$$1 - \frac{2}{\pi}\theta' = \cos\theta\ ,$$

где θ' - угол между $\vec{a}'$ и $\vec{b}$. Однако, для данных значений скрытых переменных, результаты измерений одним магнитом теперь зависят от установок отдаленного магнита, что в точности тем, чего мы хотели бы избежать.

IV. Противоречие

Теперь докажем главный результат. Поскольку ρ - нормализованное распределение вероятности,

$$\int d\lambda\, \rho(\lambda) = 1, \tag{12}$$

и согласно свойству (1), P в (2) не может быть меньше чем -1. Она может быть точно равна -1 при $\vec{a} = \vec{b}$, только если

$$A(\vec{a},\lambda) = -B(\vec{b},\lambda) \tag{13}$$

исключая из набора точки $\vec{\lambda}$ с нулевой вероятностью. С признание этого, (2) можно переписать

$$P(\vec{a},\vec{b}) = -\int d\lambda\, \rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda) A(\vec{b},\lambda)\,. \tag{14}$$

Из этого следует, что для некоторого единичного вектора $\vec{c}$

$$P(\vec{a},\vec{b})-P(\vec{a},\vec{c})=-\int dl\,p(l)[A(\vec{a},l)A(\vec{b},l)-A(\vec{a},l)A(\vec{c},l)]$$
$$=\int dl\,p(l)A(\vec{a},l)A(\vec{b},l)[A(\vec{b},l)A(\vec{c},l)-1]$$

используя (1), получим

$$\left|P(\vec{a},\vec{b})-P(\vec{a},\vec{c})\right|\le\int dl\,p(l)\left[1-A(\vec{b},l)A(\vec{c},l)\right]$$

Второе выражение справа - это $P(\vec{b},\vec{c})$, откуда

$$1+P(\vec{b},\vec{c})\ge\left|P(\vec{a},\vec{b})-P(\vec{a},\vec{c})\right| \tag{15}$$

Если P не является константой, то правая сторона имеет в общем случае порядок $|\vec{b}-\vec{c}|$ для малых значений $|\vec{b}-\vec{c}|$. Таким образом, $P(\vec{a},\vec{b})$ не может быть постоянным в минимуме (-1 в точке $\vec{b}-\vec{c}$) и не может равняться квантово-механическому значению (3).

Квантово механическая корреляция (3) не может быть произвольно близко аппроксимирована формой (2). Формальное доказательство этого может быть изложено следующим образом. Чтобы не беспокоиться о невозможности приближения в изолированных точках, рассмотрим вместо (2) и (3) функции

$$\overline{P}(\vec{a},\vec{b}) \quad \text{и} \quad \overline{-\vec{a}\cdot\vec{b}}$$

Где бруски (надчёркивания) означают независимые усреднения $P(\vec{a}',\vec{b}')$ и $-\vec{a}'\cdot\vec{b}'$ по векторам $\vec{a}'$ и $\vec{b}'$ в пределах указанных маленьких углов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Предположим, что для всех $\vec{a}$ и $\vec{b}$ различие между ними ограничено величиной e.

$$\left|\overline{P}(\vec{a},\vec{b})+\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\le e \tag{16}$$

Ниже будет показано, что e не может быть сделан произвольно маленьким.

Предположим, что для всех a и b

$$\left|\overline{\vec{a}\cdot\vec{b}}-\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\le d \tag{17}$$

Тогда из (16)

$$\left|\overline{P}(\vec{a},\vec{b})+\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\le e+d \tag{18}$$

Из (2)

$$\overline{P}(\vec{a},\vec{b})=\int dl\,p(l)\overline{A}(\vec{a},l)\overline{B}(\vec{b},l) \tag{19}$$

где

$$\left|\overline{A}(\vec{a},l)\right|\le 1 \quad \text{и} \quad \left|\overline{B}(\vec{b},l)\right|\le 1 \tag{20}$$

из (18) и (19), при $\vec{a}=\vec{b}$,

$$dl\,p(l)[\overline{A}(\vec{a},l)\overline{B}(\vec{b},l)+1]\le e+d \tag{21}$$

Из (19)

$$\overline{P}(\vec{a},\vec{b})-\overline{P}(\vec{a},\vec{c})=\int dl\,p(l)[\overline{A}(\vec{a},l)\overline{B}(\vec{b},l)-\overline{A}(\vec{a},l)\overline{B}(\vec{c},l)]$$
$$=\int dl\,p(l)\overline{A}(\vec{a},l)\overline{B}(\vec{b},l)[1+\overline{A}(\vec{b},l)\overline{B}(\vec{c},l)]$$
$$=\int dl\,p(l)\overline{A}(\vec{a},l)\overline{B}(\vec{c},l)[1+\overline{A}(\vec{b},l)\overline{B}(\vec{c},l)]$$

Используем (20), тогда

$$\left|\overline{P}(\vec{a},\vec{b}) - \overline{P}(\vec{a},\vec{c})\right| \le \int dl\,p(l)\left[1+\overline{A}(\vec{b},l)\overline{B}(\vec{c},l)\right]$$
$$= \int dl\,p(l)\left[1+\overline{A}(\vec{b},l)\overline{B}(\vec{b},l)\right]$$

Теперь используем (19) и (21)

$$\left|\overline{P}(\vec{a},\vec{b}) - \overline{P}(\vec{a},\vec{c})\right| \le 1+\overline{P}(\vec{b},\vec{c})+e+d$$

Наконец, используем (18)

$$\left|\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b}\right| - 2(e+d) \le 1 - \vec{b}\cdot\vec{c} - 2(e+d)$$

или

$$4(e+d) \ge \left|\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b}\right| + \vec{b}\cdot\vec{c} - 1 \tag{22}$$

Для примера примем, что $\vec{a}\cdot\vec{c}=0,\ \ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=1/\sqrt{2}$. Тогда

$$4(e+d) \ge \sqrt{2}-1$$

Как видим, для любого малого конечного d, e не может быть произвольно малым.

Таким образом, значение квантово механического ожидания не может быть представлено ни точно, ни произвольно близко в форме (2).

V. Обобщение

Приведенный выше пример имеет то преимущество, что он не требует большого воображения, чтобы предусмотреть измерения, используя описанные рассуждения. В общем случае, принимая [7], что любой эрмитов оператор с полным набором собственных состояний является «наблюдаемой», результат легко может быть расширен на другие системы. Если две системы имеют размерности пространства больше 2, мы всегда можем рассматривать двухмерные подпространства и определить в их пересечении операторы $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$, формально аналогичные использованным выше, и которые имеют нулевые состояния вне совокупности подпространств. Тогда, по крайней мере, для одного квантово-механического состояния «синглетное» состояние в объединенных подпространствах и статистические предсказания квантовой механики несовместимы с представлением о разделённости.

VI. Заключение

В квантовой теории с дополнительными параметрами для того, чтобы определить результаты индивидуальных измерений без того, чтобы изменить статистические предсказания, должен быть механизм, посредством которого настройка одного измеряющего устройства может влиять на чтение другого отдаленного инструмента. Кроме того, задействованный сигнал должен распространяться мгновенно так, что такая теория не может быть лоренц-инвариантом.

Конечно, ситуация будет иной, если квантовые механические предсказания имеют ограниченную достоверность. Очевидно они могут быть применены только к экспериментам, в которых установки инструментов сделаны заранее, чтобы позволить им достичь некоторой взаимной связи для обмена сигналами со скоростью меньшей или равной скорости света. В этой связи критичными являются эксперименты типа предложенного Бомом и Аароновым [6], в котором настройки изменяются в течение полета частиц.

Выражаю благодарность доктору M. Bander и J.K.Preeing за очень полезные обсуждения этой проблемы. Первый вариант статьи был написан во время пребывания в Университете Brandeis; я обязан коллегам в нем и в Университете Висконсина за их интерес и гостеприимство.

Ссылки

1. A.EINSTEIN, N.ROSEN and B.POLOLSKY, Phys. Rev. **47**, 777 (1935); see also N.BORH, Ibid. **48**, 696 (1935), W.H.FURRY, Ibid. **49**, 393 and 476 (1936), and D.R.INGLIS, Rev. Mod. Phys. **33**, 1 (1961).
2. «Но на одной гипотезе мы должны, по моему мнению, держаться абсолютно твердо: реальная фактическая ситуация на системе S_2 независима от того, что сделано с системой S_1, которая пространственно отделена от неё». A.EINSTEIN in Albert Einstein, Philosopher Scientist, (Edited by P.A.SCHILP) p.**85**, Library of Living Philosophers, Evanston, Illinois (1949).
3. J.VON NEUMAN, Mathematishe Grundfragen der Quanten-mechanik. Verlag Julius-Springer, Berlin (1932). [English translation: Princeton University Press (1955)]; J.V.JAUCH and C.PIRON, Helv. Phys. Acta **36**, 826 (1963).
4. J.S.BELL, to be published.
5. D.BOHM, Phys. Rev. **85**, **166** and 180 (1952).
6. D.BOHM and Y.AHARONOV, Phys. Rev. **108**, 1070 (1957).
7. P.A.M.DIRAC, The Principles of Quantum Mechanics (3rd Ed.) p.**37**. The Clarendon Press, Oxford (1947).

Часть 2. Комментарии к выводам

Обратимся к следующему выводу Белла:

«В квантовой теории с дополнительными параметрами для того, чтобы определить результаты индивидуальных измерений без того, чтобы изменить статистические предсказания, должен быть механизм, посредством которого настройка одного измеряющего устройства может влиять на чтение другого отдаленного инструмента. Кроме того, задействованный сигнал должен распространяться мгновенно так, что такая теория не может быть лоренц-инвариантом» [2].

Итак, для того чтобы «полная» квантовая теория делала такие же статистические предсказания, как и традиционная, необходим механизм взаимодействия между измерителями. К такому выводу Белл пришёл, последовательно и неуклонно следуя исходному положению Эйнштейна: предсказания «полной» квантовой механики должны быть статистическими, вероятностными. Здесь под «полной» квантовой механикой подразумевается теория, отвечающая высказыванию Эйнштейна: *«Хотя мы и показали, что волновая функция не даёт полного описания физической реальности, мы оставили открытым вопрос о том, существует ли такое описание или нет. Мы думаем, однако, что такая теория возможна»* [7], или теория, включающая в себя «дополнительные параметры».

В этой связи напомним высказывание Алена Аспекта: «Эйнштейн на самом деле не говорил о «скрытых переменных» или «дополнительных параметрах», а скорее об «элементах физической реальности». Соответственно, многие авторы говорят скорее о «реалистических теориях», а не о «теориях со скрытыми переменными» или «теориях дополнительных переменных». [1]

Полученные Беллом выводы отвергают возможность получения таких вероятностных результатов при наличии одних только «дополнительных переменных». Поэтому делается приведённый выше вынужденный вывод о связи между измерителями. Что это означает?

Предположим, что получен некий результат измерения на ближней системе. Если бы он был случайным, вероятностным, не связанным с действиями над удаленной системой, то это был бы результат А. Но на самом деле получен результат другой – В. А именно, результат, который не может рассматриваться как случайный! Этот результат отражает как бы зависимость от измерения на удаленной системе, он с этим результатом имеет, пусть кажущуюся, но всё-таки связь, связь более значимую, чем традиционная случайность. Этот результат можно представить как подбрасывание монеты, при падении которой орёл выпадает, например, в два раза чаще, чем решка. Очевидно, что результаты орёл и решка в данном случае не равновероятны, и выпадение одного из них явно *связано* с особенностями монеты, стола или с хитростью исследователя.

Какова же причина такого результата измерения на ближней системе? Рассмотрим возможные варианты. Например, результат В возник из-за того, что измеритель на удалённой системе передал сигнал измерителю на ближней системе и тот, изменив своё состояние, свои настройки, прочитал у частицы этот результат В вместо результата А. Именно такое предположение выдвинул Белл, чтобы связать воедино «дополнительные переменные» Эйнштейна и статистические предсказания квантовой механики. Однако это объяснение не может быть приемлемым, поскольку нарушаются выводы другой теории – специальной теории относительности.

Вариант другой. Можно предположить, что ближайший измеритель… просто выдал ложный результат, солгал! Получив результат измерения - С (вероятностное, случайное значение, никак не связанное с измерением на удалённой системе и не совпадающее с предсказанием «неполной» квантовой механики), он отбросил его и выдал нам результат В – зависимый от удалённого измерителя. И вновь это означает, что есть (сверхсветовая) передача сигнала от удалённого измерителя к близлежащему измерителю.

Не трудно заметить, что оба эти варианта в определённой степени схожи. Как понимать слова Белла «влиять на чтение»? Очевидно, это не то же самое, что «влиять на состояние второй системы». Влияние на чтение означает ни что иное, как *изменение* состояния второго измерителя! То есть, измеритель сам что-то измерил, перешёл в соответствующее состояние, но сигнал от удалённой системы перевёл его в *другое* состояние, не то, которое он получил в результате собственного измерения.

Если состояние второго измерителя *изменилось*, что можно сказать о состоянии второй, ближней системы? Только одно: оно нам *не известно*, поскольку о нём мы можем судить только по информации, поступившей к нам от этого второго, ближнего измерителя! То есть, по Беллу это означает использование *неточного* прибора, который призван устранить ошибочность исходных предположений рассматриваемой локальной теории. Приведём детали выводов Белла:

1. Запрещена связь между частицами, но она неизбежна между приборами.
2. Запрещена связь сверхсветовая, но между приборами она неизбежна.

Однако «неизбежные» выводы Белла на самом деле должна означать безвыходность ситуации для «дополнительных переменных». Их наличие требует сверхсветовой передачи сигнала! Поскольку в исходной «полной» квантовой теории по Эйнштейну между частицами такая связь отсутствует, то она навязчиво выступает в таком «пародийном» виде – сверхсветовой связи между измерителями. То есть в более широком смысле можно сказать, что Белл приходит к выводу: корреляция результатов без связи между системами (частица + измеритель) невозможна и она – сверхсветовая (о том, как она достигается в «неполной», традиционной квантовой теории, умалчивается). Выводы Белла показывают, что полученный результат (корреляция) фактически полностью *адекватен* сверхсветовой *связи* между системами (частица + измеритель). Придерживаясь лоренц-инвариантности «полной» квантовой механики, Белл показывает, что «дополнительные переменные», тем не менее, нарушают её. Эйнштейн не предлагает решения проблемы, поскольку не рассматривает не - вероятностную зависимость. Однако наблюдаемое явление не может быть описано иначе, чем более сильная, нежели случайная, зависимость измерений, которая практически схожа с влиянием одного измерения на другое. Белл это доказывает в самом общем виде.

Хотя доказательство Белла должно было показать отсутствие зависимости между измерениями, и в этом смысле его доводы совпадают с целями Эйнштейна (показать отсутствие связи между системами), но выводы убеждают, что измерения являются зависимыми. Белл явно не приводит эту зависимость (закон Малуса):

$$P(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{1}{2} \times \cos^2(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

P(**a**,**b**) – вероятность совместной регистрации двух запутанных частиц;
(**a**,**b**) –угол между измерителями.

Можно ли, рассматривая эту зависимость, сказать иначе, нежели «результат одного измерения зависит от угла (настройки) удалённого измерителя»? Настройка удаленного измерителя явным образом *влияет* на результат измерения на данной системе. И Белл доказывает это вполне убедительно: результаты измерений зависят друг от друга, они не являются независимыми, вероятностными. Есть ли другое описание явления? Могут ли результаты измерений быть *не случайными* (по отношению друг к другу) и вместе с тем *независимыми* (друг от друга)? Однако нелокальность утверждает это.

По Эйнштейну результаты измерения частиц косвенно являются зависимыми. Эта зависимость формируется в момент запутывания частиц и сохраняется до конца опыта. То есть, случайными состояния частиц формируются в момент их разделения. В дальнейшем они сохраняют полученные при запутывании состояния, и «хранятся» эти состояния в неких элементах физической реальности, описываемых «дополнительными параметрами».

«Но одно предположение представляется мне бесспорным. Реальное положение вещей (состояние) системы S_2 не зависит от того, что проделывают с пространственно отделённой от неё системой S_1». [6, с.290]

«…так как во время измерения эти две системы уже не взаимодействуют, то в результате каких бы то ни было операций над первой системой, во второй системе уже не может получиться никаких реальных изменений». [7]

В своих выкладках Белл конкретизирует эти представления Эйнштейна в форме набора параметров, обозначив их l. Состояния систем возникают случайно, правда, не в точке разделения систем, а в точках измерения, по «записям» в дополнительных переменных. И такая вероятностная закономерность, как доказал Белл, исключена. Но даже в этом случае результаты измерений оказываются зависимыми друг от друга. Действительно, если частицы принимают свои значения, зависимые от скрытых параметров l – *«результат A измерения $\vec{s}_1 \cdot \vec{a}$ зависит от $\vec{a}$ и l, а результат B измерения $\vec{s}_2 \cdot \vec{b}$ в том же самом случае зависит от $\vec{b}$ и l »* [2], но и сами параметры l были взаимосвязаны при разделении систем, то это ни что иное, как опосредованное влияние измерений друг на друга. Опосредованное, но, тем не менее, – влияние, зависимость. То есть, это влияние измерений друг на друга или влияние частиц друг на друга (против чего выступает и Эйнштейн), Белл заменяет влиянием друг на друга дополнительных параметров. Исходным предположением было отсутствие такого влияния - «дальнодействия». Но совсем отказаться от него оказалось невозможно, поэтому Белл выдвинул идею о том, что друг на друга должны влиять измерители. Либо, учитывая, что связь между частицами заменена аналогичной связью между «дополнительными параметрами», измерители влияют друг на друга и «настраивают» их. В чем различие двух механизмов влияния? Рассмотрим их подробнее.

1. Одна частица влияет на другую
2. Один измеритель влияет на другой измеритель.

В первом случае измерители друг на друга не влияют и показывают истинное, правильное состояние частиц. То есть измерение истинное, приборы не лгут. Такое влияние частиц друг на друга отрицает вероятностный характер их связи и подтверждает предсказания квантовой механики, но требует а) связи, б) сверхсветовой передачи сигнала.

Во втором случае, частицы ведут себя вероятностно. Но это не согласуется с предсказаниями квантовой механики (и эксперимента). В этом случае измерители выдают не вероятностные результаты (подтверждаемые экспериментом). То есть измерители показывают не то, как ведут себя частицы, которые, как мы предполагаем, ведут себя вероятностно. Следовательно, приборы – *лгут*! Но ведь для того, чтобы солгать нужным образом, приборы должны передать друг другу информацию. Какую? Откуда они знают, как нужно солгать? Очевидно, перед тем, как солгать, они измерили *истинное*, вероятностное состояние частиц. Затем, используя эти данные, исказили их таким образом, что результат оказался не-вероятностным. Но мы видим лишь показания измерителей, поэтому о вероятностном характере поведения частиц знать не можем. Кстати, для создания существующей картины, первому из измерителей искажать результат, видимо, не обязательно. Иначе, он должен будет «придумать» исход не только для второго измерителя, но и для себя самого. Хотя такая асимметрия ничем не оправдана, процедура измерения могла бы выглядеть примерно так:

Частицы имеют вероятностные состояния A и B. Первый из измерителей регистрирует состояние A, но выдаёт результат D, передавая второму измерителю указание показать результат C, лишая его возможности самому исказить результат. Вот такие интриги при квантово-механическом дворе должны разыграть измерители, чтобы выполнить установку (задание, стоящее перед ними), сформулированную Беллом:

- подогнать поведение частиц под вероятностный характер (сохранив согласие с экспериментом и «неполной» квантовой механикой);
- исключить связь между частицами;
- сохранить лоренц-инвариант системы.

Вывод, приведённый Беллом, фактически подразумевает подтасовку результатов измерителями. Но и при этом мы наблюдаем всё те же – квантово-механические показания измерителей! То есть полностью согласующиеся с экспериментом. Вероятностное поведение частиц по-прежнему «скрыто» от наших глаз, и влияние измерителей друг на друга не даёт ничего нового. Этот вывод Белла оказался выше им же опровергнут.

Итак, из выкладок Белла можно сделать вывод, что даже с нарушением СТО допущение о влиянии измерителей друг на друга не может выявить локального характера поведения систем, их независимого друг от друга поведения на момент измерения. То есть квантово-механическая корреляция результатов измерения запутанных частиц при отрицании такого влияния не имеет рационального объяснения. Это весьма благодатная почва для мистики и религии. Однако выше уже было отмечено, что и доводы в пользу нелокальности построены на достаточно зыбком фундаменте.

Независимость систем друг от друга является предположением, которое в значительной степени (и даже главным образом) основано на стремлении остаться в рамках релятивизма. Рассмотрим эти основания. Во-первых, сверхсветовая корреляция результатов измерений не противоречит специальной теории относительность, поскольку нет передачи сигнала в релятивистском смысле. Во-вторых, не зафиксирован и даже гипотетически не описан «корреляционный сигнал», хотя есть работа, в которой утверждается, что была измерена скорость передачи подобного «сигнала» [3]. В-третьих, свойством нелокальности является очевидная зависимость результатов измерения друг от друга при отрицании такой зависимости. То есть, с точки зрения теории вероятности, результаты измерений подпадают под определение событий зависимых. Действительно, как ещё можно рассматривать результаты двух измерений, если результат первого из них достоверно, то есть с вероятностью, равной единице, предсказывает результат второго измерения? Но сторонники традиционной квантовой механики не очень убедительно отрицают эту связь. В качестве довода приводится ссылка на правила вычисления вероятностей. В квантовой механике складываются не вероятности, а амплитуды вероятностей. Однако правила вычислений вряд ли могут служить объяснением механизма возникновения такой зависимости или такой вероятности. Например, выпадение орла или решки при подбрасывании монеты в классической теории вероятности вычисляется по определенным правилам. Но по какой причине возникает такое распределение, теория вероятности не объясняет. В квантовой механике правило сложения амплитуд вероятностей (волновых функций) позволяет точно вычислить результат измерений (вероятность выпадения некоторого результата), но это правило не обязано объяснять физический механизм появления таких результатов. Это означает, что нет абсолютно никаких оснований для обвинений в адрес квантовой механики за отсутствие таких объяснений! Объяснение нелокальности и несепарабельности как физических процессов, видимо, выходит за рамки этой теории.

В логике известен способ доказательства, который можно назвать «доведением до абсурда». Делается некоторое исходное предположение, утверждение. Затем логическими преобразованиями получают из него выводы, которые противоречат исходным предположениям. Считается доказанным, что исходные предположения ошибочны, опровергнуты. В статье Белла явно просматриваются основные приёмы этого метода. Но вывод из рассуждений Белла сделан с очевидным отступлением от метода. Исходными предположениями (можно сказать, от имени Эйнштейна) были следующие:

1. Признание постулата специальной теории относительности о предельности скорости передачи информации, которая не может превышать скорость света.
2. Разделённые системы не влияют друг на друга, никакие изменения в одной системе не должны оказывать влияния на другую.
3. Результат измерения на одной системе является вероятностным (независимым) по отношению к результату, полученному при измерении на другой системе.

Эксперимент и квантово-механические вычисления показывают, что пункт 3 нарушается. Очевидным выводом должен быть следующий: результаты измерений на двух системах не являются вероятностными. Что является альтернативой к случайной связи величин? Видимо, зависимость одной величины от другой. Эти величины связаны причинно-следственными отношениями. Но для квантовой механики это не приемлемо, поскольку теперь оказывается нарушенным пункт 2 предположений. Что является очевидной альтернативой отсутствию влияния систем друг на друга? Очевидно, наличие такого влияния! Но тогда нарушается пункт 1, поскольку налицо явное сверхсветовое «синхронное» поведение частиц. Для «спасения» пункта 1 приводятся доводы об отсутствии сигнала как такового, сигнала в релятивистском смысле. С этим очень легко согласиться, но возникает двусмысленность. Да, релятивистский сигнал не зафиксирован и пункт 1, вроде бы спасён. Но есть «синхронность», поэтому признание релятивистского постулата в пункте 1 не является убедительным обоснованием для отсутствия влияния, то есть связи. Необходимо отказаться от пункта 1, но… вместо этого вводится нелокальность, несепарабельность с нескрываемым мистическим оттенком [4]. Это не передача релятивистского сигнала. И даже вообще не передача какого бы то ни было сигнала (то, что не обнаружено, не существует!): корреляционного, квантового, сигнала коллапса, как его ни называй. То есть вроде бы какая-то передача «синхронности» есть, но её… нет. Налицо явное стремление отрицать очевидное: две системы имеют друг с другом сверхсветовую связь. Пусть она не релятивистская и не является явным опровержением СТО (через опровержение её базового постулата о скорости света). Но формально одна из систем передаёт другой системе некоторый сигнал. Поэтому очевидно, что пункт 1 *экспериментально* и квантово-механическими *вычислениями* опровергается. То есть правильным выводом из рассуждений Белла должен быть вывод: сверхсветовая связь между системами имеется [5]. Однако Белл делает странный вывод. Он по-прежнему остаётся верен первому пункту. Это и вынуждает его сделать этот странный вывод, который иначе, как «шутливым» не назовёшь. Вместо очевидно опровергнутой предпосылки об отсутствии связи между системами, он вводит связь между… измерителями. Хотя формально это мало что меняет: сверхсветовая связь нужна, но она всё равно не позволяет выявить вероятностное поведение независимых систем.

Признание сверхсветовой связи между системами должно быть признано как следствие метода «доведения до абсурда». Поскольку отказ от сверхсветовой «нерелятивистской» (?) связи между частицами приводит к неприемлемому результату, следовательно, такая связь имеет место. Однако мистическая нелокальность лучше. Но она лучше только, если не попытаться объяснить её механизм, который явно выглядит именно как сверхсветовая передача «нерелятивистского» (?) сигнала. Вопрос в скобках означает, что не исключается и материальная связь, пока не зарегистрированная, то есть некими частицами или волнами, распространяющимися с нарушением СТО.

Теперь, рассматривая всё в обратном порядке, видим, что нарушение пункта 1, в свою очередь, приводит к опровержению пункта 2. Это противоречит представлениям Эйнштейна о «дальнодействии», но полностью соответствует его представлениям об элементах физической реальности. А это уже намного больше физика, чем мистика несепарабельности и нелокальности. О пункте 3 можно сказать лишь, что он как был, так и остался ошибочным предположением. Возражения Эйнштейна о полноте квантово-механического описания действительности, таким образом, приобретают новое звучание.

Литература

1. Aspect A. «Bell's theorem: the naive view of an experimentalist», 2001, (http://quantum3000.narod.ru/papers/edu/aspect_bell.zip)
2. Bell J.S., On the Einstein Podolsky Rosen paradox, Physics Vol.1, No.3, pp.198-200, 1964
3. Zbinden H., Brendel J., Gisin N., Tittel W., Experimental test of non-local quantum correlation in relativistic configurations, Group of Applied Physics, University of Geneva, February 7, 2006 (2000)
4. Доронин С.И., Сепарабельные состояния, Квантовая Магия, том 4, вып. 4, стр. 4124-4133, 2007, http://www.quantmagic.narod.ru/volumes/VOL442007/p4124.html
5. Путенихин П.В., *Квантовая механика против СТО*, Квантовая Магия, 4, 2130 (2007), http://quantmagic.narod.ru/volumes/VOL422007/p2130.html
6. Эйнштейн А. Собрание научных трудов в четырех томах. Том 4. Статьи, рецензии, письма. Эволюция физики. М.: Наука, 1967, http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Einstein_t4_1967ru.djvu
7. Эйнштейн А., Подольский Б., Розен Н. Можно ли считать квантовомеханическое описание физической реальности полным? / Эйнштейн А. Собр. научных трудов, т. 3. М., Наука, 1966, с. 604-611

Часть 3. Оригинал статьи (англ.)

Сохранено форматирование оригинального текста

Physics Vol. 1, No. 3, pp. 198-200, 1964 Physics Publishing Co. Printed in the United States

ON THE EINSTEIN PODOLSKY ROSEN PARADOX*

J.S.BELL[1)]
Department of Physics, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin

(Received 4 November 1964)

I. Introduction

THE paradox of Einstein, Podolsky and Rosen [1] was advanced as an argument then quantum mechanics could not be a complete theory but should be supplemented by additional variables. These additional variables were to restore to the theory causality and locality [2]. In this note that idea will be formulated mathematically and shown to be incompatible with the statistical predictions of quantum mechanics. It is the requirement of locality, or more precisely that the result of a measurement on one system be unaffected by operations on a distant system with which it has interacted in the past, that creates the essential difficulty. There have been attempts [3] to show that even without such a separability or locality requirement no «hidden variable» interpretation of quantum mechanics is possible. These attempts have been examined elsewhere [4] and found wanting. Moreover, a hidden variable interpretation of elementary quantum theory [5] has been explicitly constructed. That particular interpretation has indeed a grossly non-local structure. This is characteristic, according to the result to be proved here, of any such theory which reproduces exactly the quantum mechanical predictions.

II. Formulation

With the example advocated by Bohm and Aharonov [6], the EPR argument is the following. Consider a pair of spin one-half particles formed somehow in the singlet spin state and moving freely in opposite directions. Measurements can be made, say by Stern-Gerlach magnets, on selected components of the spins $\vec{s}_1$ and $\vec{s}_2$. If measurement of the component $\vec{s}_1 \cdot \vec{a}$, where $\vec{a}$ is some unit vector, yields value +1 then, according to quantum mechanics, measurement of $\vec{s}_2 \cdot \vec{a}$ must yield the value –1 vice versa. Now we make the hypothesis [2], and it seems one at least worth considering, that if the two measurements are made at places remote from one another the orientation of one magnet does not influence the result obtained with the other. Since we can predict in advance the result of measuring any chosen component of $\vec{s}_2$, by previously measuring the same component of $\vec{s}_1$, it follows that the result of any such measurement must actually be predetermined. Since the initial quantum mechanical wave function does ***not determine*** the result of an individual measurement, this predetermination implies the possibility of a more complete specification of the state.

Let this more complete specification be effected by means of parameters l. It is a mater of indifference in the following whether l denotes a single variable or a set, or even a set of functions, and whether the variables are discrete or continuous. However, we write as if l were a single continuous parameter. The result A of measuring $\vec{s}_1 \cdot \vec{a}$ is then determined by $\vec{a}$ and l, and the result B of measuring $\vec{s}_2 \cdot \vec{b}$ in the same instance is determined by $\vec{b}$ and l, and

---

* Work supported an part by the U.S. Atomic Energy Commission

1) On leave of absence from SLAC and CERN

$$A(\vec{a}, l) = \pm 1, B(\vec{b}, l) = \pm 1, \tag{1}$$

The vital assumption [2] is that the result B for particle 2 does not depend on the setting $\vec{a}$, of the magnet for particle 1, nor A on $\vec{b}$.

If $p(l)$ is the probability distribution of l then the expectation value of the product of the two components $\vec{s}_1 \cdot \vec{a}$ and $\vec{s}_2 \cdot \vec{b}$ is

$$P(\vec{a},\vec{b}) = \int d l p(l) A(\vec{a}, l) B(\vec{b}, l) \tag{2}$$

This should equal the quantum mechanical expectation value, which for the singlet state is

$$< \vec{s}_1 \cdot \vec{a} \vec{s}_2 \cdot \vec{b} >= -\vec{a} \cdot \vec{b} . \tag{3}$$

But it will be shown that this is not possible.

Some might prefer a formulation in which the hidden variables fall into two sets, with A dependent on one and B on the other; this possibility is contained in the above, since l stands for any number of variables and the dependences thereon of A and B are unrestricted. In a complete physical theory of the type envisaged by Einstein, the hidden variables would have dynamical significance and laws of motion; our l can then be thought of as initial values of these variables at some suitable instant.

III. Illustration

The proof of the main result is quite simple. Before giving it, however, a number of illustrations may serve put it in perspective.

First, there is no difficulty in giving a hidden variable account of spin measurements on a single particle. Suppose we have a spin half particle in a pure spin state with polarization denoted by a unit vector $\vec{p}$. Let the hidden variable (for example) a unit vector $\vec{l}$ with uniform probability distribution over the hemisphere $\vec{l} \cdot \vec{p} > 0$. Specify that the result of measurement of a component $\vec{s} \cdot \vec{a}$ is

$$\text{sign } \vec{l} \cdot \vec{a}' \tag{4}$$

where $\vec{a}'$ is a unit vector depending on $\vec{a}$ and $\vec{p}$ in way to be specified, and the sign function is +1 or –1 according to the sign of its argument. Actually this leaves the result undetermined when $l \cdot a' = 0$, but as the probability of this is zero we will not make special prescriptions for it. Averaging over $\vec{l}$ the expectation value is

$$< \vec{s} \cdot \vec{a} >= 1 - \frac{2q'}{p} , \tag{5}$$

where q' is the angle between $\vec{a}'$ and $\vec{p}$. Suppose then that $\vec{a}'$ is obtained from $\vec{a}$ by rotation towards $\vec{p}$ until

$$1 - \frac{2q'}{p} = \cos q \tag{6}$$

where q is the angle between $\vec{a}$ and $\vec{p}$. Then we have the desired result

$$< \vec{s} \cdot \vec{a} >= \cos q , \tag{7}$$

So in this simple case there is no difficulty in the view that the result of every measurement is determined by the value of an extra variable, and that the statistical features of quantum mechanics arise because the value of this variable is unknown in individual instances.

Secondly, there is no difficulty in reproducing, in the form (2), the only features of (3) commonly used in verbal discussions of this problem:

$$\left.\begin{array}{l} P(\vec{a},\vec{a}) = -P(\vec{a},-\vec{a}) = -1 \\ P(\vec{a},\vec{b}) = 0 \quad \text{if} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \end{array}\right\} \tag{8}$$

For example, let l now be until vector $\vec{l}$, with uniform probability distribution over all directions, and take

$$\left.\begin{array}{l} A(\vec{a},\vec{l}) = \operatorname{sign}(\vec{a}\cdot\vec{l}) \\ B(a,b) = -\operatorname{sign}(\vec{b}\cdot\vec{l}) \end{array}\right\} \tag{9}$$

This gives

$$P(\vec{a},\vec{b}) = -1 + \frac{2}{p} q\ , \tag{10}$$

where q is the angle between a and b, and (10) has the properties (8). For comparison, consider the result of a modified theory [6] in which the pure singlet state is replaced in the course of time by an isotropic mixture of product states; this gives the correlation function

$$-\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} \tag{11}$$

It is probably less easy, experimentally, to distinguish (10) from (3), than (11) from (3).

Unlike (3), the function (10) is not stationary at the minimum value –1 (at q = 0). It will be seem that this is characteristic of functions of type (2).

Thirdly, and finally, there is no difficulty in reproducing the quantum mechanical correlation (3) if the result A and B in (2) are allowed to depend on $\vec{b}$ and $\vec{a}$ respectively as well on $\vec{a}$ and $\vec{b}$. For example, replace $\vec{a}$ in (9) by $\vec{a}'$, obtained from $\vec{a}$ by rotation towards $\vec{b}$ until

$$1 - \frac{2}{p} q' = \cos q\ ,$$

where q' is the angle between $\vec{a}'$ and $\vec{b}$. However, for given values of the hidden variables, the results of measurements with one magnet now depend on the setting of the distant magnet, which is just what we would wish to avoid.

IV. Contradiction

The main result will now be proved. Because p is a normalized probability distribution,

$$\int d l\, p(l) = 1, \tag{12}$$

and because of the properties (1), P in (2) cannot be less than –1. It can reach –1 at $\vec{a} = \vec{b}$ only if

$$A(\vec{a}, l) = -B(\vec{b}, l) \tag{13}$$

except at a set of points $\vec{l}$ of zero probability. Assuming this, (2) can be rewritten

$$P(\vec{a},\vec{b}) = -\int d l\, p(l) A(\vec{a}, l) A(\vec{b}, l)\,. \tag{14}$$

198 J.S.BELL Vol. 1, No. 3

It follows that $\vec{c}$ is another unit vector

$$P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c}) = -\int d l p(l)[A(\vec{a}, l)A(\vec{b}, l) - A(\vec{a}, l)A(\vec{c}, l)]$$
$$= \int d l p(l)A(\vec{a}, l)A(\vec{b}, l)[A(\vec{b}, l)A(\vec{c}, l) - 1]$$

using (1), whence

$$\left|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})\right| \le \int d l p(l)\left[1 - A(\vec{b}, l)A(\vec{c}, l)\right]$$

The second term on the right is $P(\vec{b},\vec{c})$, whence

$$1 + P(\vec{b},\vec{c}) \ge \left|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})\right| \tag{15}$$

Unless P is constant, the right hand side is in general of order $|\vec{b} - \vec{c}\,|$ for small $|\vec{b} - \vec{c}\,|$. Thus $P(\vec{a},\vec{b})$ cannot be stationary at the minimum value (-1 at $\vec{b} - \vec{c}$) and cannot equal the quantum mechanical value (3).

Nor can the quantum mechanical correlation (3) be arbitrarily closely approximated by the form (2). The formal proof of this may be set out as follows. We would not worry about failure of the approximation at isolated points, so let us consider instead of (2) and (3) the functions

$$\bar{P}(\vec{a},\vec{b}) \quad \text{and} \quad \overline{-\vec{a}\cdot\vec{b}}$$

where the bar denotes independent averaging of $\bar{P}(\vec{a}',\vec{b}')$ and $-\vec{a}'\cdot\vec{b}'$ over vectors $\vec{a}'$ and $\vec{b}'$ within specified small angles of $\vec{a}$ and $\vec{b}$. Suppose that for all $\vec{a}$ and $\vec{b}$ the difference is bounded by e.

$$\left|\bar{P}(\vec{a},\vec{b}) + \vec{a}\cdot\vec{b}\right| \le e \tag{16}$$

Then it will be shown that e cannot be made arbitrarily small.

Suppose that for all a and b

$$\left|\overline{\vec{a}\cdot\vec{b}} - \vec{a}\cdot\vec{b}\right| \le d \tag{17}$$

Then from (16)

$$\left|\bar{P}(\vec{a},\vec{b}) + \vec{a}\cdot\vec{b}\right| \le e + d \tag{18}$$

From (2)

$$\bar{P}(\vec{a},\vec{b}) = \int d l p(l)\bar{A}(\vec{a}, l)\bar{B}(\vec{b}, l) \tag{19}$$

where

$$\left|\bar{A}(\vec{a}, l)\right| \le 1 \quad \text{and} \quad \left|\bar{B}(\vec{b}, l)\right| \le 1 \tag{20}$$

from (18) and (19), with $\vec{a} = \vec{b}$,

$$d l p(l)[\bar{A}(\vec{a}, l)\bar{B}(\vec{b}, l) + 1] \le e + d \tag{21}$$

From (19)

$$\bar{P}(\vec{a},\vec{b}) - \bar{P}(\vec{a},\vec{c}) = \int d l p(l)[\bar{A}(\vec{a}, l)\bar{B}(\vec{b}, l) - \bar{A}(\vec{a}, l)\bar{B}(\vec{c}, l)]$$
$$= \int d l p(l)\bar{A}(\vec{a}, l)\bar{B}(\vec{b}, l)[1 + \bar{A}(\vec{b}, l)\bar{B}(\vec{c}, l)]$$
$$= \int d l p(l)\bar{A}(\vec{a}, l)\bar{B}(\vec{c}, l)[1 + \bar{A}(\vec{b}, l)\bar{B}(\vec{c}, l)]$$

Using (20) then

$$\left|\bar{P}(\vec{a},\vec{b})-\bar{P}(\vec{a},\vec{c})\right| \le \int dl\,p(l)\left[1+\bar{A}(\vec{b},l)\bar{B}(\vec{c},l)\right]$$
$$=\int dl\,p(l)\left[1+\bar{A}(\vec{b},l)\bar{B}(\vec{b},l)\right]$$

Then using (19) and (21)

$$\left|\bar{P}(\vec{a},\vec{b})-\bar{P}(\vec{a},\vec{c})\right| \le 1+\bar{P}(\vec{b},\vec{c})+e+d$$

Finally, using (18)

$$\left|\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}\right|-2(e+d) \le 1-\vec{b}\cdot\vec{c}-2(e+d)$$

or

$$4(e+d) \ge \left|\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}\right|+\vec{b}\cdot\vec{c}-1 \tag{22}$$

Take for example $\vec{a}\cdot\vec{c}=0,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=1/\sqrt{2}$. Then

$$4(e+d) \ge \sqrt{2}-1$$

Therefore, for small finite d, e cannot be arbitrarily small.

Thus, the quantum mechanical expectation value cannot be represented, either accurately or arbitrarily closely, in the form (2).

V. Generalization

The example considered above has the advantage that it requires little imagination to envisage the measurements involved actually being made. In a more formal way, assuming [7] that any Hermitian operator with a complete set of eigenstates is an «observable», the result is easily extended to other systems. If the two systems have state spaces of dimensionality greater then 2 we can always consider two dimensional subspaces and define, in their direct product, operators $\vec{s}_1$ and $\vec{s}_2$ formally analogous to those used above and which are zero for states outside the product subspace. Then for at least one quantum mechanical state, the «singlet» state in the combined subspaces, the statistical predictions of quantum mechanics are incompatible with separable predetermination.

VI. Conclusion

In a theory in which parameters are added to quantum mechanics to determine the results of individual measurements, without changing the statistical predictions, there must be a mechanism whereby the setting of one measuring device can influence the reading of another instrument, however remote. Moreover, the signal involved must propagate instantaneously, so that such a theory could not be Lorentz invariant.

Of course, the situation is different if the quantum mechanical predictions are of limited validity. Conceivably they might apply only to experiments in which the settings of the instruments are made sufficiently in advance to allow them to reach some mutual rapport by exchange of signals with velocity less than or equal to that of light. In that connection, experiments of the type proposed by Bohm and Aharonov [6], in which the settings are changed during the flight of the particles, are crucial.

I am indebted to Drs. M. Bander and J.K.Preeing for very useful discussions of this problem. The first draft of the paper was written during a stay at Brandeis Univesity; I am indebted to colleagues there and at the University of Wisconsin for their interest and hospitality.

References

1. A.EINSTEIN, N.ROSEN and B.POLOLSKY, Phys. Rev. **47**, 777 (1935); see also N.BORH, Ibid. **48**, 696 (1935), W.H.FURRY, Ibid. **49**, 393 and 476 (1936), and D.R.INGLIS, Rev. Mod. Phys. **33**, 1 (1961).
2. "But on one supposition we should, in my opinion, absolutely hold fast: the real factual situation of the system S_2 is independent of what is done with the system S_1, which is spatially separated from the former." A.EINSTEIN in Albert Einstein, Philosopher Scientist, (Edited by P.A.SCHILP) p.**85**, Library of Living Philosophers, Evanston, Illinois (1949).
3. J.VON NEUMAN, Mathematishe Grundfragen der Quanten-mechanik. Verlag Julius-Springer, Berlin (1932). [English translation: Princeton University Press (1955)]; J.V.JAUCH and C.PIRON, Helv. Phys. Acta **36**, 826 (1963).
4. J.S.BELL, to be published.
5. D.BOHM, Phys. Rev. **85**, **166** and 180 (1952).
6. D.BOHM and Y.AHARONOV, Phys. Rev. **108**, 1070 (1957).
7. P.A.M.DIRAC, The Principles of Quantum Mechanics (3rd Ed.) p.**37**. The Clarendon Press, Oxford (1947).