

Спиновая частица в магнитном поле - уравнение Паули и его расщепление на два уравнения для реальных функций

В.И. Сбитнев¹

(Получена 18 марта 2008; опубликована 15 апреля 2008)

Бомовское расщепление уравнения Паули предполагает представление комплексной волновой функции через произведение двух реальных функций. Одна функция – действие, другая – квантовая энтропия. Действие описывается уравнением Гамильтона-Якоби, модифицированное квантовым корректором. Здесь модификации подвергаются кинетическая и потенциальная энергии. Определяется кватернионный базис, в рамках которого описывается поведение спина. Проводится сравнительный анализ резонансного переворота спина в периодическом магнитном поле и рассеяния плоской волны на щелевом экране. Дается оригинальная трактовка теории электромагнитного поля Максвелла в кватернионном базисе. Структура тензора электромагнитного поля и представление спина в кватернионном базисе оказываются конгруэнтны.

1. Введение

Вся информация о поведении частицы заключена в операторе эволюции $|\Psi(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)\rangle$ [Займан, 1971]. В случае нерелятивистского предела, этот оператор находится из решения уравнения Шредингера. Данное уравнение, описывающее поведение частицы со спином $\frac{1}{2}$ во внешнем электромагнитном поле, известно как уравнение Паули [Esposito и др., 2004; Wikipedia(a), 2008]. Оно имеет следующий вид:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)\rangle = \left(\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \right)^2 + e f \right) |\Psi(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)\rangle - \frac{e\hbar}{4mc} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}) |\Psi(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)\rangle. \quad (1)$$

уравнение Шредингера терм Штерна-Герлаха

Здесь m - масса частицы, c - скорость света², e - ее заряд, $\mathbf{P} = -i\hbar \nabla$ представляет 3-компонентный оператор импульса частицы (∇ - оператор градиента), f - скалярный электрический потенциал, \mathbf{A} - векторный электромагнитный потенциал, \mathbf{B} - магнитное поле, а \mathbf{S} представляет 3-компонентный оператор, представленный матрицами Паули s_x , s_y и s_z . Наличие 2×2 -матриц Паули в этом уравнении полагает, что оператор эволюции $|\Psi(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)\rangle$ является двухкомпонентным вектором. Известно, что описание частицы с полу целым спином нуждается в привлечении новой математической функции - спинора, учитывающего полу целый характер спина. Выраженный в Дираковском представлении, оператор эволюции $|\Psi(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)\rangle$ в таком случае имеет следующий вид

¹ Valery.sbitnev@gmail.com, Санкт-Петербургский Институт Ядерной Физики им. Б.П.Константинова, РАН.

² Иногда полагают $c = 1$ и, для удобства, параметр c часто опускается. Здесь параметр c сохранен, так как существует еще одна константа $s = 4\pi e_0 \hbar / e^2$ с размерностью [sec/m] (e_0 - диэлектрическая проницаемость вакуума), претендующая на размерную единицу континуума время-пространство [Полуян 2002, 2005].

$$|\Psi(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)\rangle = \mathcal{U}(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t) \begin{pmatrix} |j_+\rangle \\ |j_-\rangle \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Теперь давайте взглянем на уравнение (1). Это уравнение включает уравнение Шредингера, как базовое уравнение, и добавленный к уравнению Шредингера терм Штерна-Герлаха. При попытке расщепить данное уравнение на два, имеющих дело с реальными функциями [Bohm, 1952] – действие и плотность вероятности, здесь мы сталкиваемся с проблемой, обусловленной наличием термина Штерна-Герлаха. На самом деле, каждая спинорная компонента, $|j_+\rangle$ и $|j_-\rangle$, является комплексной функцией. А матрицы Паули, представленные в терме Штерна-Герлаха, перепутывают не только верхнюю и нижнюю компоненты спинора (благодаря матрицам S_x и S_y), но реальные и мнимые части этих компонент (матрица S_y включает мнимые единицы). Поэтому, прежде чем привлечь процедуру Бома по расщеплению уравнения (1) на два уравнения, следует внимательно разобраться с термом Штерна-Герлаха [Янчилин, 2006].

Прежде всего, зададимся вопросом, какую цель мы преследуем, выполняя процедуру расщепления? Ведь нахождение решений уравнения (1) является оптимальной процедурой именно в представлении волновой функции как комплексной функции своих аргументов. Эти решения представляют собой сухой математический протокол о проявлениях физической реальности. Но они не говорят о ее сути. В расщепленных уравнениях, которые имеют дело с реальными функциями, получение решений представляется более сложной задачей. Расщепленные уравнения, по существу, представляют уравнение Гамильтона-Якоби, дополненное квантовым корректором, и уравнение непрерывности плотности вероятности (или, что эквивалентно, уравнение баланса энтропии – квантовой энтропии [Сбитнев, 2008]). Эти уравнения освещают квантовую реальность более осязаемо, благодаря возможности осмысливать квантово-механические движения на фоне таких же движений в классической физике.

Далее мы попытаемся привести терм Штерна-Герлаха, записанного в спинорном представлении (2), где обе компоненты $|j_+\rangle$ и $|j_-\rangle$ являются комплексными функциями, к форме кватернионного представления, где заданы четыре компоненты, каждая из которых является реальной функцией. В терме Штерна-Герлаха фигурируют две физически-значимые сущности – матрицы Паули и вектор магнитной индукции. Первым делом мы попытаемся описать движение частицы с полу целым спином в магнитном поле, изложив описание на языке кватернионных матриц. Кватернионы (четверка некоммутативных единиц), впервые описанные Гамильтоном [Baker, 2008], находят широкое применение в физике, благодаря их естественной привязке к геометрии четырехмерного континуума [Румер, 1936; Пенроуз и Риндлер, 1988; Каминский, 2005]. Поэтому, вслед за описанием спина, представленного через кватернионные матрицы, дадим формулировку электромагнитной теории Максвелла, также изложенной в этом же базисе.

2. Частица с полу целым спином в магнитном поле

Спинор $|j(t)\rangle$, представляющий состояния «спин-вверх» и «спин-вниз» спина $S = 1/2$ в магнитном поле, подчиняется матричным преобразованиям группы $SU(2)$:

$$|j(t+dt)\rangle = D(\mathbf{u})|j(t)\rangle, \quad D(\mathbf{u}) \in SU(2). \quad (3)$$

Любой элемент группы $SU(2)$ может быть разложен в базисе, представленного четверкой матриц - единичная матрица S_0 и три матрицы Паули S_x , S_y и S_z :

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Это разложение имеет вид:

$$D(\mathbf{u}) = u_0 \cdot S_0 + iu_x \cdot S_x + iu_y \cdot S_y + iu_z \cdot S_z \quad (5)$$

с реальными членами разложения

$$u_0 = \cos\left(\frac{x}{2}\right), \quad u_x = b_x \sin\left(\frac{x}{2}\right), \quad u_y = b_y \sin\left(\frac{x}{2}\right), \quad u_z = b_z \sin\left(\frac{x}{2}\right), \quad (6)$$

где

$$b_x = \frac{B_x}{\sqrt{(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)}}, \quad b_y = \frac{B_y}{\sqrt{(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)}}, \quad b_z = \frac{B_z}{\sqrt{(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)}}$$

представляют компоненты единичного вектора $\hat{\mathbf{b}}$, указывающего направление вектора магнитной индукции $\hat{\mathbf{B}}$. Можно видеть, что всегда $u_0^2 + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$. Угол прецессии x пропорционален времени пребывания, dt , спина в магнитном поле, более конкретно³:

$$x = -g_e \sqrt{(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)} \cdot dt. \quad (7)$$

Здесь гиромагнитное отношение электрона g_e [Wikipedia(b), 2008] есть

$$g_e = -g_e m_B / \hbar \approx 1.76085977 \times 10^{11} [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}]$$

$g_e \approx 2$ - электронный g -фактор, а магнетон Бора

$$m_B = e\hbar / 2m_e c$$

представлен в терме Штерна-Герлаха в качестве константы, e - элементарный заряд, \hbar - постоянная Планка, m_e - масса покоя электрона, c - скорость света.

Результат произведения любых элементов группы принадлежит этой же самой группе – правило, лежащее в определении группы. Это означает, что произведение l матриц $D(\hat{\mathbf{u}}_l)$ группы $SU(2)$ принадлежит этой же группе

$$D(\mathbf{s}_l) = D(\mathbf{u}_l) \cdot D(\mathbf{u}_{l-1}) \cdot \mathbf{L} \cdot D(\mathbf{u}_1) \in SU(2) \quad (8)$$

Так как матрица $D(\mathbf{s}_l)$ принадлежит группе $SU(2)$, ее элементы могут быть представлены в форме (6) с некоторыми формализованными углом прецессии z и ориентацией поля $\hat{\mathbf{m}}$.

³ Здесь знак прецессии выбирается отрицательным (так как отрицателен множитель g_e), чтобы в результате получился бы правильный знак перед членом Штерна-Герлаха.

Пусть частица со спином $\frac{1}{2}$ пролетает в магнитном поле путь длиной L , $l=1,2,\dots,L$, так что $L = \int \mathbf{L} \cdot d\mathbf{r}$. Здесь $d\mathbf{r}$ есть отрезок пути, пролетаемый за время dt , см. уравнение (3). Пусть элемент $D(\mathbf{s}_l)$ известен. Вычислим следующий элемент преобразования

$$D(\mathbf{s}_{l+1}) = D(\mathbf{u}_{l+1}) \cdot D(\mathbf{s}_l) \quad (9)$$

Распишем произведение этих матриц, $D(\mathbf{u}_{l+1})$ и $D(\mathbf{s}_l)$, через представление (5)

$$(s_0 \mathbf{s}_0 + i s_x \mathbf{s}_x + i s_y \mathbf{s}_y + i s_z \mathbf{s}_z) = (u_0 \mathbf{s}_0 + i u_x \mathbf{s}_x + i u_y \mathbf{s}_y + i u_z \mathbf{s}_z) \cdot (s_0 \mathbf{s}_0 + i s_x \mathbf{s}_x + i s_y \mathbf{s}_y + i s_z \mathbf{s}_z).$$

При взятии произведения следует принимать во внимание, что

$$\mathbf{s}_a \mathbf{s}_b = d_{a,b} \mathbf{s}_0 + i e_{a,b,g} \mathbf{s}_g, \quad (10)$$

здесь a, b, g перебирают все комбинации x, y, z в матрицах Паули (4). Здесь $d_{a,b}$ есть символ Кронекера, равный единице в случае $a = b$ и равный нулю в остальных случаях, а $e_{a,b,g}$ представляет символ Леви-Чивита [Wikipedia(c), 2008]:

$$e_{a,b,g} = \begin{cases} +1, & \text{если } (a, b, g) \text{ есть } (1, 2, 3), (3, 1, 2) \text{ или } (2, 3, 1), \\ -1, & \text{если } (a, b, g) \text{ есть } (3, 2, 1), (1, 3, 2) \text{ или } (2, 1, 3), \\ 0, & \text{в случаях } a = b, \quad b = g, \quad g = a. \end{cases} \quad (11)$$

В результате ряда утомительных вычислений⁴ получаем следующее матричное уравнение, преобразующее компоненты s_0, s_x, s_y, s_z при отображении $\mathbf{s}_l \rightarrow \mathbf{s}_{l+1}$:

$$\begin{pmatrix} s_0 \\ s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix}_{l+1} = \begin{pmatrix} u_0 & -u_x & -u_y & -u_z \\ u_x & u_0 & u_z & -u_y \\ u_y & -u_z & u_0 & u_x \\ u_z & u_y & -u_x & u_0 \end{pmatrix}_{l+1} \cdot \begin{pmatrix} s_0 \\ s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix}_l \quad (12)$$

Здесь матричные коэффициенты u_x, u_y, u_z несут информацию о величине и направлении магнитного поля, а также о времени пролета через это поле, заключенном в фазе x . Матрица в уравнении (12) может быть представлена в форме разложения по кватернионам $u_0 h_0 + u_x h_x + u_y h_y + u_z h_z$. Кватернионы h_0, h_x, h_y, h_z имеют вид

$$h_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Они удовлетворяют правилу

⁴ Mathcad, Matematika, Maple, например, значительно помогают делать аналитические выкладки.

$$h_a h_b = -d_{a,b} h_0 - e_{a,b,g} h_g, \quad (14)$$

здесь a, b, g перебирают все комбинации x, y, z . Поучительно сравнить с правилом (10), выписанном для матриц Паули.

2.1. Пример: Электрон в ведущем постоянном магнитном поле, подверженный периодическому воздействию слабого поперечного магнитного поля

Условная схема установки показана на **Рис. 1**. Здесь не показаны узлы, ответственные за воспроизводство электронов. Это может быть лампа бегущей волны [Википедия(а), 2008]. Важно отобразить только основные узлы. Электронный пучок проходит через поляризатор (система магнитных зеркал) так, чтобы на выходе был подготовлен пучок с заданной поляризацией электронов. А именно, все спины электронов ориентированы по полю B_z , которое задается соленоидом. На выходе анализатор отбирает электроны, имеющие спины ориентированные против поля B_z ⁵. Результат фиксируется на детекторе (например, на экране осциллоскопа).

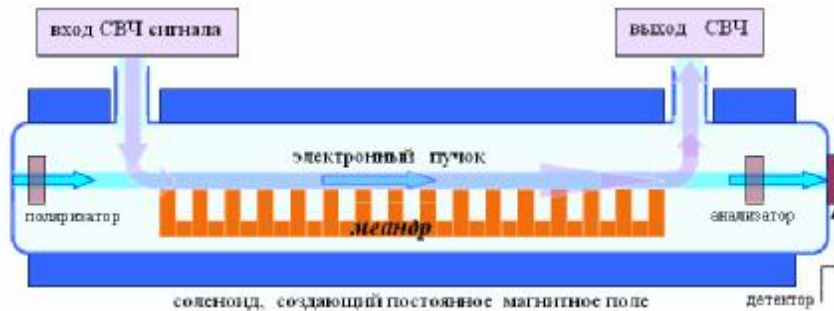


Рисунок 1.

Поляризованные электроны пролетают вдоль меандра, который помещен внутри соленоида.

Поляризованные электроны пролетают вдоль меандра, на котором входной СВЧ сигнал создает периодическое электромагнитное поле. Меандр обеспечивает соответствие скорости дрейфа электромагнитного паттерна СВЧ волны со скоростью электронов на их пролетной базе в пределах меандра. Для нас сейчас важно, что здесь формируется периодическое магнитное поле, ориентированное в плоскости (x, y) , т.е., в плоскости, которое перпендикулярно ориентации постоянного магнитного поля B_z , создаваемого соленоидом. Поперечное магнитное поле является значительно слабее продольного поля B_z . Так как меандровая структура имеет большое количество секций, результирующей эффект на выходе может оказаться вполне наблюдаемым - резонансный переворот спинов как функция скорости электронов (или как функция напряжения на аноде лампы).

Конфигурация магнитного поля на одном периоде меандра может быть довольно сложной. Но эта конфигурация повторяется N раз - столько, сколько секций меандра укладывается на пролетной базе электрона. Так как $N \gg 1$, искажения магнитного поля, возникающими на краях меандра, будем пренебрегать. Разобьем один период на l тонких слоев, в пределах которых будем полагать поле постоянным. Вычисляя произведение l матриц (8), находим результирующую матрицу $D(\vec{s}_l)$ на выходе одного периода. И как следствие, далее можно определить эффективный угол прецессии z и направление эффективного поля \vec{m} . Так что, коэффициенты обобщающей матрицы есть:

$$s_0 = \cos\left(\frac{z}{2}\right), \quad s_x = m_x \sin\left(\frac{z}{2}\right), \quad s_y = m_y \sin\left(\frac{z}{2}\right), \quad s_z = m_z \sin\left(\frac{z}{2}\right)$$

⁵ В данной постановке эксперимента детектируется вероятность переворота спина.

При пролете через N периодов, эти матрицы перемножаются N раз. Результирующая матрица будет иметь то же самое направление эффективного «магнитного» поля $\dot{\mathbf{m}}$ ⁶, а угол прецессии будет равен Nz , т.е., углы прецессии складываются:

$$s_0 = \cos\left(\frac{Nz}{2}\right), \quad s_x = m_x \sin\left(\frac{Nz}{2}\right), \quad s_y = m_y \sin\left(\frac{Nz}{2}\right), \quad s_z = m_z \sin\left(\frac{Nz}{2}\right).$$

Результирующий спинор, в согласии с представлениями (3) и (5), будет иметь форму

$$\begin{pmatrix} |j_+\rangle \\ |j_-\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 + is_z \\ i(s_x + is_y) \end{pmatrix} \quad (15)$$

Если на выходе поляризатора спины были ориентированы по полю B_z , т.е., $|j_+\rangle = u_0 + iu_z$ а $|j_-\rangle = 0$, то вероятность переворота из состояния «спин вверх» в состояние «спин вниз», при пролете всей меандровой структуры, есть

$$\langle j_-(N) | j_-(N) \rangle = s_x^2 + s_y^2 = (m_x^2 + m_y^2) \sin^2\left(\frac{Nz}{2}\right). \quad (16)$$

Вероятность переворота спина на одном периоде есть

$$\langle j_-(1) | j_-(1) \rangle = (m_x^2 + m_y^2) \sin^2\left(\frac{z}{2}\right). \quad (17)$$

Эта вероятность является чрезвычайно малой величиной из-за малости фактора $(m_x^2 + m_y^2)$, что обусловлено очень слабым поперечным магнитным полем, создаваемым в меандре бегущей СВЧ волной. Давайте выразим фактор $(m_x^2 + m_y^2)$ через члены $\sin^2(z/2)$ и $\langle j_-(1) | j_-(1) \rangle$ и результат подставим в (16). В результате мы получаем формулу вероятности переворота спина, при пролете N -периодической магнитной конфигурации

$$\langle j_-(N) | j_-(N) \rangle = \langle j_-(1) | j_-(1) \rangle \frac{\sin^2\left(\frac{Nz}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)} \quad (18)$$

Набег фазы z складывается из разворота спина вокруг поперечного магнитного поля и его прецессии в ведущем поле соленоида. Разворот в поперечном магнитном поле чрезвычайно мал. Иными словами, вероятность переворота спина на одном периоде, $\langle j_-(1) | j_-(1) \rangle$, ничтожно мала. С другой стороны, прецессия в ведущем поле может быть значительной. Когда прецессия достигает порядка $2pk$, знаменатель в формуле (18) обращается в нуль. Синус в числителе содержит фазовый сдвиг Nz , увеличивающий

⁶ Следует заметить, направление этого «поля» не всегда совпадает с направлениями реальных полей.

частоту колебаний этого множителя в N раз. Однако, в окрестности точки $2pk$ этот множитель также обращается в нуль.

Так как в окрестности резонанса фазовый набег z мал (для простоты выкладок резонанс сдвинут в начало отсчета), давайте оба синуса в формуле (18) разложим в ряды Тейлора и оставим только первые члены разложения

$$\langle j_{-}(N) | j_{-}(N) \rangle \approx \langle j_{-}(1) | j_{-}(1) \rangle \frac{\left(\frac{Nz}{2}\right)^2}{\left(\frac{z}{2}\right)^2} = \langle j_{-}(1) | j_{-}(1) \rangle \cdot N^2.$$

Вероятность $\langle j_{-}(N) | j_{-}(N) \rangle$ обращается в единицу, если множитель $\langle j_{-}(1) | j_{-}(1) \rangle$ имеет малость порядка N^{-2} . В принципе, чтобы иметь конкретное представление о множителе $\langle j_{-}(1) | j_{-}(1) \rangle$, надо знать, как себя ведет поперечное магнитное поле на одном периоде меандра. Здесь мы не будем вдаваться в тонкости этого вопроса, но просто положим $\langle j_{-}(1) | j_{-}(1) \rangle = N^{-2}$. Этому соответствует резонансный переворот спина, смотри **Рис. 2**.

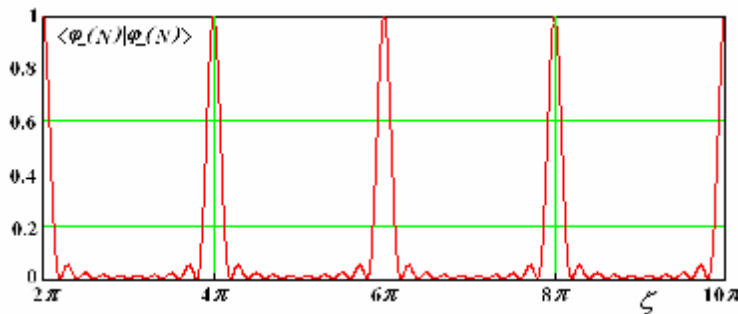


Рисунок 2.

Вероятность $\langle j_{-}(N) | j_{-}(N) \rangle$ показывает в окрестности углов $z = 2pk$, ($k = 1, 2, 3, \dots$) резонансные перевороты спина. Здесь для наглядности графика задано малое $N = 10$. Конфигурационный фактор (первый множитель) есть $\langle j_{-}(1) | j_{-}(1) \rangle = N^{-2}$.

Множитель в (18), составленный из отношения двух синусов, представляет *дифракционный фактор*. Собственно, легко узнаваемый из оптики вид формулы (18) и является причиной включить в рассмотрение этот пример. Первое, что обращает на себя внимание - формулы дифракции света на N щелях и вероятности переворота спина в состоянии против поля представляются одной и той же математической формулой.

В случае света, плоская волна, падая на экран, имеющий N щелей, дает в зоне Фраунгофера дифракционный паттерн [Nave, 2005]. Такой дифракционный паттерн для случая решетки, состоящей из $N = 6$ щелей, демонстрируется на **Рис. 3**.

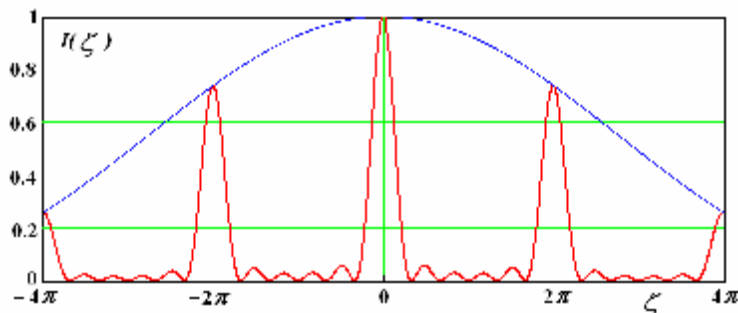


Рисунок 3.

Дифракционный паттерн на решетке, состоящей из $N = 6$ щелей. Синим цветом показана огибающая, которая соответствует рассеянию света на одиночной щели. Интенсивности рассеяния на щели имеется аналог - вероятность $\langle j_{-}(1) | j_{-}(1) \rangle$.

Световые волны представляют колебания электромагнитного поля в четырехмерном пространстве-времени (ict, x, y, z) . Время t при описании дифракции входит неявно. Оно задает неопределенный фазовый сдвиг wt . Опуская этот сдвиг, дифракционный паттерн может быть вполне успешно вычислен непосредственно в координатном пространстве (x, y, z) , в пределе геометрической оптики [Ландау и Лифшиц, 1988], **Рис. 4**.

⁷ Не важно, в какой момент падает волна на щелевой экран - важно как возникает дифракционный паттерн.

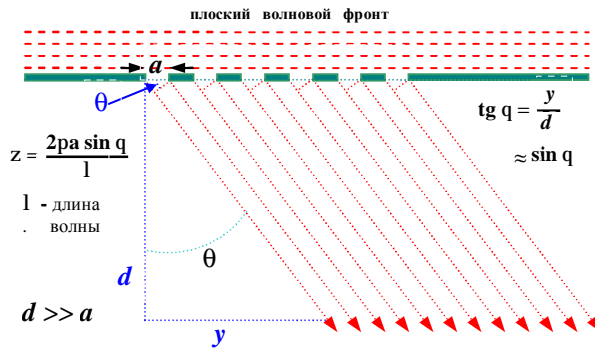


Рисунок 4.

Дифракция Фраунгофера в ее геометрическом объяснении [Nave, 2005]: плоская волна падает на экран, состоящий из N щелей. Размер щелей a много меньше расстояния до детектора d , где регистрируется дифракционный паттерн. Параллельный пучок лучей падает на детектор, удаленный на «бесконечность» - $d \gg 1$.

Здесь следует достаточно аккуратно просуммировать лучи от всех щелей, уходящие параллельно на «бесконечность». Этот предел называется зоной Фраунгофера. Строго говоря, вырезанный щелью фрагмент волны не может представлять в поперечном сечении идеальную плоскость. В этом видится недостаточность геометрического приближения.

В случае вероятности переворота спина, частица пролетает меандр, включающий N пластинок, которые задают поперечное возмущающее магнитное поле. В этом случае, состояния спина могут быть представлены движениями единичного четырехмерного вектора (u_0, u_x, u_y, u_z) на единичной сфере S^3 вложенной в четырехмерное пространство. Неопределенность фазы, которой пренебрегают, возникает на стадии приготовления поляризованного пучка со спинами ориентированными вверх: $|j_+\rangle = u_0 + iu_z$, $u_0^2 + u_z^2 = 1$. Без потери ясности картины переворота, можно положить, например, $u_0 = 0$ и $u_z = 1$. Здесь также могут быть задействованы только три компоненты, описывающие поведение спинов в магнитном поле как вращения обычных волчков.

Два, казалось бы, различные 4-мерные пространства - 4-мерное пространство кватернионов, представляющее движения спина на сфере единичного радиуса S^3 , и обычный пространственно-временной континуум (x, y, z, ct) - обнаруживают глубокое соответствие в описании разнородных явлений. Эти наблюдения подмечены научной общественностью [Румер, 1936; Полуян, 2002, 2005; Baker, 2008; Wikipedia(d), 2008]. Выраженные через призму геометрической алгебры - алгебры Клиффорда, они находят широкое применение в различных областях науки [Пенроуз и Риндлер, 1988; Baylis & Jones, 1988, 1989; Baylis, 1996; Baylis & Sobczyk, 2004; Каминский, 2005]. Далее, в рамках этого соответствия, а именно, в рамках кватернионного базиса (13), будет изложена оригинальная версия теории электромагнитного поля Максвелла, которая идеально согласуется с кватернионными представлениями спинорных движений. Эти описания, как говорят, конгруэнтны. А сейчас продолжим расщепление уравнения (1) на два уравнения для реальных функций.

2.2. Продолжаем аналитические выкладки далее

В пределе $x \rightarrow 0$, $(u_0 \rightarrow 1)$, т.е., при разбиении пролетной базы L на более мелкие участки $dr \rightarrow 0$, от уравнения (12) приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} s_0(t_0, t) \\ s_x(t_0, t) \\ s_y(t_0, t) \\ s_z(t_0, t) \end{pmatrix} = \frac{g_e}{2} \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -B_z & B_y \\ -B_y & B_z & 0 & -B_x \\ -B_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0(t_0, t) \\ s_x(t_0, t) \\ s_y(t_0, t) \\ s_z(t_0, t) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

В отличие от уравнения (12), здесь члены матрицы, представляющие магнитное поле, входят с отрицательным знаком. Инверсия знаков проистекает из того факта, что фаза \mathbf{x} в формуле (7) определена со знаком минус. Именно этот знак минус и возникает в (19).

Уравнение (19) описывает эволюцию четырех компонент, $s_0(t_0, t)$, $s_x(t_0, t)$, $s_y(t_0, t)$ и $s_z(t_0, t)$, представляющих спин частицы $|j_+\rangle = s_0 + is_z$ и $|j_-\rangle = -s_y + is_x$, при пролете ее через пролетную базу L . В начальный момент $t = t_0$ спин частицы готовится в состоянии $s_0(t_0, t_0)$, $s_x(t_0, t_0)$, $s_y(t_0, t_0)$, и $s_z(t_0, t_0)$. Конец 4-вектора $\mathbf{s} = (s_0, s_x, s_y, s_z)$ при этом двигается по поверхности единичной сферы S^3 , вложенной в четырехмерное пространство. Под воздействием магнитного поля он может описывать довольно сложные фигуры на этой поверхности. Тогда как в результате измерения мы можем видеть только проекции спина на ось квантования, как правило, это – ведущее магнитное поле.

Прежде, чем двигаться дальше, попытаемся перейти от уравнения (19), записанного в кватернионном представлении, к терму Штерна-Герлаха (1), представленного через спиноры (15), а именно, к представлению $|j_+\rangle = s_0 + is_z$ и $|j_-\rangle = -s_y + is_x$:

- Умножим уравнение (19) на \mathbf{h} , и примем во внимание, что g -фактор электрона есть 2: $g_e/2 \approx 1$. Вместо множителя $g_e/2$, в (19) слева, появится магнетон Бора $m_B = e\hbar/2m_e c$ с отрицательным знаком, так как гиромангнитное отношение, по определению, содержит знак минус, $g_e = -g_e m_B / \hbar$.
- Умножим второе и четвертое уравнения, выписанные справа ниже, на мнимую единицу и переставим, для удобства, эти уравнения. Третье уравнение умножим на -1. Справа дан результат

$$\mathbf{h} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} s_0(t_0, t) \\ s_x(t_0, t) \\ s_y(t_0, t) \\ s_z(t_0, t) \end{pmatrix} = -m_B \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -B_z & B_y \\ -B_y & B_z & 0 & -B_x \\ -B_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0(t_0, t) \\ s_x(t_0, t) \\ s_y(t_0, t) \\ s_z(t_0, t) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{h}\dot{\&}_0 = -m_B (-iB_z \cdot is_z - B_y(-s_y) - iB_x \cdot is_x) \\ \mathbf{h}\dot{\&}_x = -m_B (-iB_z \cdot s_0 - iB_x(-s_y) - B_y \cdot is_x) \\ -\mathbf{h}\dot{\&}_y = -m_B (B_y \cdot s_0 - iB_x \cdot is_z + iB_z \cdot is_x) \\ \mathbf{h}\dot{\&}_z = -m_B (-iB_x \cdot s_0 + B_y \cdot is_z + iB_z(-s_y)) \end{cases}$$

- Складываем первые два и вторые два уравнения, выписанные выше справа:

$$\begin{cases} \mathbf{h}(\dot{\&}_0 + i\dot{\&}_z) = -m_B (-iB_z(s_0 + is_z) - (B_y + iB_x)(-s_y + is_x)) \\ \mathbf{h}(-\dot{\&}_y + i\dot{\&}_x) = -m_B ((B_y - iB_x)(s_0 + is_z) + iB_z(-s_y + is_x)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{h}|j_+\rangle = -m_B (-iB_z|j_+\rangle - (B_y + iB_x)|j_-\rangle) \\ \mathbf{h}|j_-\rangle = -m_B ((B_y - iB_x)|j_+\rangle + iB_z|j_-\rangle) \end{cases}$$

- Уравнения, выписанные выше, умножаются на мнимую единицу. Получаем окончательно

$$\mathbf{h} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} |j_+\rangle \\ |j_-\rangle \end{pmatrix} = -m_B \begin{pmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |j_+\rangle \\ |j_-\rangle \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Правая часть данного уравнения, можно видеть, точно копирует терм Штерна-Герлаха в уравнении (1). В результате, переписывая уравнение Паули (1) в кватернионном базисе, получаем следующий вид этого уравнения:

$$\mathbf{h} \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)\rangle = \left(\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\phi \right) |\Psi(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)\rangle - i m_B \left(\frac{\hbar}{2m} \mathbf{B} \cdot \nabla \right) |\Psi(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)\rangle. \quad (21)$$

уравнение Шредингера терм Штерна-Герлаха

Член $(\mathbf{\hat{h}} \cdot \mathbf{\hat{B}}) = h_x B_x + h_y B_y + h_z B_z$ представляет скалярное произведение магнитного поля $\mathbf{\hat{B}}$ и 3-компонентного оператора $\mathbf{\hat{h}}$, составленного из кватернионов h_x, h_y, h_z (13). Следует обратить внимание, поскольку мы должны были умножать предшествующие уравнения на мнимую единицу, чтобы получить уравнение (20), терм Штерна-Герлаха, в данном случае, входит с мнимой единицей - сравни с уравнением (1).

Оператор эволюции $|\Psi(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)\rangle$ представляет теперь 4-компонентную волновую функцию, допускающую разложение на две составляющие – спинорную и волновую. Спинорная составляющая является 4-вектором с реальными компонентами. Давайте выпишем этот оператор, состоящий из произведения трех функций ⁸

$$|\Psi(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)\rangle = \begin{pmatrix} s_0(t_0, t) \\ s_x(t_0, t) \\ s_y(t_0, t) \\ s_z(t_0, t) \end{pmatrix} \cdot \sqrt{r(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)} \cdot \exp\{i J(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t) / \mathbf{h}\} \quad (22)$$

$$= \wp(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t) \cdot \exp\{i J(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t) / \mathbf{h}\}.$$

Здесь $\langle \Psi(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t) | \Psi(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t) \rangle dx dy dz = r(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t) dx dy dz$ есть вероятность обнаружения частицы в окрестности точки $\mathbf{r} = (x, y, z)$ в момент времени t при условии, что в момент времени t_0 она находилась в окрестности точки $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Поскольку s_0, s_x, s_y, s_z и $\sqrt{r(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)}$ являются реальными функциями, для удобства вычислений они объединены в одну функцию $\wp(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t) = \mathbf{s}(t_0, t) \sqrt{r(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)}$. Произведение $\wp^\dagger(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t) \cdot \wp(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)$ возвращает $r(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)$ так как $(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}) = s_0^2 + s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$.

Полагается, что компоненты s_0, s_x, s_y, s_z зависят только t . Иными словами, волновая компонента $\mathcal{Y}(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t) = \sqrt{r(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)} \cdot \exp\{i J(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t) / \mathbf{h}\}$ в каждый момент времени t , в любой точке пространства $\mathbf{r} \in (-\infty, +\infty)$, нагружается одинаковым признаком $\mathbf{s} = (s_0, s_x, s_y, s_z)$ - признаком состояния спина. Это означает, что частица, испытавшая переворот спина при пролете через меандр, сохраняет новое состояние спина, вне зависимости от того, в какой точке пространства теперь она будет зарегистрирована, в согласии с вероятностью обнаружения частицы $r(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t) dx dy dz$.

- Подставим $|\Psi(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)\rangle = \wp(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t) \cdot \exp\{i J(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t) / \mathbf{h}\}$ в уравнение (21). Два оператора в данном уравнении – оператор сдвига во времени, $i\mathbf{h}\partial/\partial t$, и оператор канонического импульса, $(-i\mathbf{h}\nabla - e/c\mathbf{\hat{A}})$, - дают следующие члены:

$$(a) \quad i\mathbf{h} \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = i\mathbf{h} \frac{\partial}{\partial t} \wp \exp(iJ/\mathbf{h}) = -|\Psi\rangle \frac{\partial J}{\partial t} + i\mathbf{h} \exp(iJ/\mathbf{h}) \frac{\partial}{\partial t} \wp;$$

$$(b) \quad \left(-i\mathbf{h}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{\hat{A}}\right)^2 |\Psi\rangle = \left(-\mathbf{h}^2 \nabla^2 + i\mathbf{h} \frac{e}{c} \mathbf{\hat{A}} \nabla + i\mathbf{h} \frac{e}{c} \nabla \mathbf{\hat{A}} + \left(\frac{e}{c} \mathbf{\hat{A}}\right)^2\right) \wp \exp(iJ/\mathbf{h})$$

$$= \left(\nabla J - \frac{e}{c} \mathbf{\hat{A}}\right)^2 |\Psi\rangle - i\mathbf{h} 2 |\Psi\rangle \left(\nabla J - \frac{e}{c} \mathbf{\hat{A}}\right) \frac{1}{\wp} \nabla \wp - i\mathbf{h} |\Psi\rangle \left(\nabla \left(\nabla J - \frac{e}{c} \mathbf{\hat{A}}\right)\right) - \mathbf{h}^2 |\Psi\rangle \frac{1}{\wp^2} \nabla^2 \wp.$$

⁸ Для простоты выкладок исключаются из рассмотрений неоднородные магнитные поля [Янчилин, 2006].

- Теперь вспомним, что $\varphi(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t) = \mathbf{s}(\mathbf{r}_0, t_0) \sqrt{r(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)}$ и завершим операции дифференцирования

$$(a') \quad -|\Psi\rangle \frac{\partial J}{\partial t} + i\hbar \exp(iJ/\hbar) \frac{\partial}{\partial t} \varphi = -|\Psi\rangle \frac{\partial J}{\partial t} + i\hbar \exp(iJ/\hbar) \sqrt{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \mathbf{s} + i\hbar \exp(iJ/\hbar) \frac{\mathbf{s}}{2\sqrt{r}} \frac{\partial}{\partial t} r;$$

$$(b') \quad \left(\nabla J - \frac{e \mathbf{r}}{c \mathbf{A}} \right)^2 |\Psi\rangle - i\hbar 2 |\Psi\rangle \left(\nabla J - \frac{e \mathbf{r}}{c \mathbf{A}} \right) \frac{1}{2r} \nabla r - i\hbar |\Psi\rangle \left(\nabla \left(\nabla J - \frac{e \mathbf{r}}{c \mathbf{A}} \right) \right) + \hbar^2 |\Psi\rangle \left(\frac{\nabla r}{2r} \right)^2 - \hbar^2 |\Psi\rangle \left(\frac{\nabla^2 r}{2r} \right).$$

При вычислении члена $\varphi(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)$ принимается во внимание, что \mathbf{s} не зависит от пространственных координат. В выше приведенных формулах реальные члены охвачены скобками (a) и (c), а скобкой (b) охвачены члены, содержащие мнимую единицу. В согласии с разделением на реальные и мнимые компоненты уравнения (21), два полученных уравнений описывают действие J , плотность вероятности $r(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)$ и состояние спина $\mathbf{s}(\mathbf{r}_0, t_0)$. Последние две компоненты завязаны в одном уравнении. Таким образом, уравнение, представляющее действие J , есть модифицированное квантовым корректором уравнение Гамильтона-Якоби

$$-\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\nabla J - \frac{e \mathbf{r}}{c \mathbf{A}} \right)^2 + ef + Q(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t), \tag{23}$$

а второе уравнение описывает как плотность вероятности r так состояние спина \mathbf{s} :

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + \frac{\mathbf{r}}{2r} \frac{\partial r}{\partial t} = -\frac{\mathbf{s}}{2m} \left(\nabla J - \frac{e \mathbf{r}}{c \mathbf{A}} \right) \frac{\nabla r}{r} - \frac{\mathbf{s}}{2m} \nabla \left(\nabla J - \frac{e \mathbf{r}}{c \mathbf{A}} \right) - \frac{m_B}{\hbar} (\mathbf{h}, \mathbf{B}) \mathbf{s}. \tag{24}$$

Квантовый корректор $Q(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)$ в (23) имеет вид [Сбитнев, 2008]:

$$Q(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\left(\frac{\nabla r}{2r} \right)^2 - \frac{\nabla^2 r}{2r} \right) \tag{25}$$

Спинорная составляющая частицы, можно видеть, не участвует явно в формировании квантового корректора, хотя она и представлена в совместном уравнении (24). Давайте введем новую функцию [Сбитнев, 2008]

$$S(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2} \ln(r(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)) = -\ln \left(\sqrt{r(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)} \right). \tag{26}$$

Эта функция имеет смысл энтропии. Тогда квантовый корректор переписывается как

$$Q(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla S)^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 S. \tag{27}$$

Введем также канонический импульс

$$\mathbf{p} = \nabla J - \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad (28)$$

и скорость частицы $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{p}}/m$. Тогда уравнения (23) и (24), при учете представлений (27) и (28), переписываются в форме:

$$-\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla S)^2 + e\mathbf{f} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 S, \quad (29)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} + (\dot{\mathbf{v}}, \nabla S) + (\nabla \dot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{s} \right) |\mathbf{s}\rangle + \left(\frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{s}\rangle + \frac{m_B}{\hbar} (\dot{\mathbf{h}}, \mathbf{B}) |\mathbf{s}\rangle \right) = 0. \quad (30)$$

Уравнение (29) соответствует модифицированному квантовым корректором (члены, подкрашенные сиреневым цветом) уравнению Гамильтона-Якоби. Однако, уравнение (30) включает дополнительную часть (d), окрашенную красным цветом, которая соответствует терму Штерна-Герлаха. Удивительно, что член, описывающий поведение спина частицы отошел в уравнение баланса энтропии, а не остался в уравнении Гамильтона-Якоби. По существу, отсюда следует, что уравнение баланса энтропии, наряду с источником энтропии $(\nabla \dot{\mathbf{v}})$, имеет еще один дополнительный источник энтропии, обусловленный прецессией спина в магнитном поле.

Может ли терм Штерна-Герлаха, включенный в уравнение (30), давать вклад в энтропию, по мере того как спин эволюционирует в магнитном поле? Умножим данное уравнение слева на 4-вектор, ортогональный 4-вектору $|\mathbf{s}\rangle$. Тогда часть (b) исчезает. Остается только часть (d), описывающая поведение спина в магнитном поле. Обе части, (b) и (d), как следует из этой операции, являются независимыми друг от друга. Следовательно, уравнение баланса энтропии относится только к координатной части волновой функции. Это уравнение определяет суть квантового корректора (27).

Приготовленная изначально ориентация спина, является признаком частицы, вне зависимости от того, где она была обнаружена, как диктуется координатной частью волновой функции. Иными словами, спин – это метка, приписываемая координатной части волновой функции. Эта метка сохраняет свой признак во всем пространстве до тех пор, пока она не подвергнется воздействию магнитного поля. Подвергнутая воздействию поля, метка меняет свой признак (т.е., ориентацию спина), который относится ко всему координатному пространству, в пределах которого определена волновая функция.

Теперь обратим взор на модифицированное уравнение Гамильтона-Якоби (29). Это уравнение вычисляет действие $J(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)$, называемая также производящая функция. По существу, действие задает сдвиг фазы в волновой функции (22). Здесь обнаруживается замечательная аналогия между геометрической оптикой (см. Рис. 3 и Рис. 4) и движением механической частицы [Ландау и Лифшиц, 1988]. Условный след, оставляемой частицей при движении, представляет геодезическую траекторию, которая может быть вычислена из решения уравнения (29). Следует различать, однако, отличие квантово-механической геодезической траектории от классической геодезической траектории. Последняя обычно изображается сплошной одноцветной кривой. Тогда как в первом случае необходимо принимать во внимание квантово-механическую природу траектории. Проблема в том, что вдоль такой геодезической траектории необходимо наносить дополнительную шкалу, связанную с длиной волны частицы. Этому соответствует введение дополнительной

координаты – цветной координаты, ранжированной по цвету от синего к красному вдоль длины волны I , используемой в качестве меры длины. Если оставлять точки, отвечающие одному цвету (допустим, красному), тем самым будут прорисованы линии равных фаз. Именно эти линии представляют волновые фронты квантово-механической картины движения. На **Рис. 5** показана Монте-Карловская симуляция рассеяния частиц на экране, имеющего две щели. Здесь волновой паттерн проявляется в результате множественных трассировок геодезических траекторий через шаги, кратные длине волны.

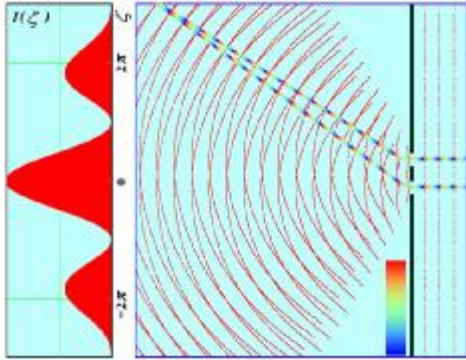


Рисунок 5.

Монте-Карловская симуляция рассеяния частиц на экране, содержащего две щели. Показано только рассеяние плоской волны вперед экрана. Вдоль траекторий отмечены красным цветом только точки, кратные длине волны I . Показаны две траектории (цветная окраска), сходящиеся в фазе в верхней части рисунка слева. Слева показана интенсивность $I(V)$, соответствующая дифракции на двух щелях.

В явном виде показаны две траектории, сходящиеся в фазе в верхней части рисунка. Их незначительная изогнутость вблизи щелевого экрана обусловлена дрейфом траекторий в геометрическую тень, вызванная квантовым корректором - импульс частицы $\dot{\mathbf{p}}$ в уравнении (29) подвергается незначительному искажению $\dot{\mathbf{p}}_{\pm} = \dot{\mathbf{p}} \pm \hbar \nabla S$. Кинетическую энергию частицы можно представить произведением двух составляющих:

$$E_{\text{kin}} = \frac{\mathbf{p}^2 - \hbar^2 (\nabla S)^2}{2m} = \frac{\mathbf{p}_+ \mathbf{p}_-}{2m}.$$

Из приведенных выкладок следует заключение:

уравнение Шредингера имеет дело с ансамблями геодезических траекторий. Длина волны частицы, $I = 1/|k|$, задает вдоль траекторий естественную шкалу, здесь \mathbf{k} есть волновое число, связанное с импульсом частицы простым отношением $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$. В отличие от классической физики, анализирующей индивидуальные траектории, квантовая механика оценивает ансамбли траекторий. Какая из траекторий реализуется, это - дело случая, а точнее, имеет место вероятностный исход $r(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t) dx dy dz$.

3. Электромагнитная теория Максвелла в кватернионном базисе

В уравнении (19) компоненты магнитного поля (B_x, B_y, B_z) собраны в 4-мерную матрицу, составленную из кватернионов h_0, h_x, h_y, h_z . Давайте попробуем выразить также тензор электромагнитного поля в этом же самом базисе. В этой связи определим два кватернионных модуля – дифференциальный оператор

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= i c^{-1} \partial_t h_0 + \partial_x h_x + \partial_y h_y + \partial_z h_z, \\ \mathbf{D}^T &= i c^{-1} \partial_t h_0^T + \partial_x h_x^T + \partial_y h_y^T + \partial_z h_z^T = i c^{-1} \partial_t h_0 - \partial_x h_x - \partial_y h_y - \partial_z h_z, \end{aligned} \quad (31)$$

здесь $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$, $\partial_z = \partial/\partial z$, и электромагнитный потенциал

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi} &= ifh_0 + A_x h_x + A_y h_y + A_z h_z, \\ \mathbf{\Pi}^T &= ifh_0 - A_x h_x - A_y h_y - A_z h_z.\end{aligned}\tag{32}$$

Знак Т означает транспонирование матриц \mathbf{D} и $\mathbf{\Pi}$, а c - скорость света. Мнимые единицы введены в модули (31) и (32) для того, чтобы произведения двух сопряженных модулей давали сигнатуру $\{-1,+1,+1,+1\}$. Так, д'Аламбертиан $\square^2 = -c^{-2}\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$, показывающий сигнатуру $\{-1,+1,+1,+1\}$, может быть представлен произведением

$$\mathbf{D}^T \mathbf{D} = (-c^{-2}\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)h_0\tag{33}$$

Теперь определим главные посылки:

- Электромагнитный потенциал $\mathbf{\Pi}$, представленный скалярным потенциалом f и векторным потенциалом $\mathbf{\dot{A}} = (A_x, A_y, A_z)$, лежит в основе наблюдаемых магнитного и электрического полей, в согласии со следующими формулами

$$\begin{aligned}\mathbf{\dot{B}} &= \text{rot } \mathbf{\dot{A}}, \\ \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \mathbf{\dot{A}} - \text{grad } f.\end{aligned}\tag{34}$$

- Существует бесчисленное множество электромагнитных потенциалов, которые могут дать тот же самый результат посредством вычислений (34). А именно, магнитное и электрическое поля сохраняются в результате таких вычислений, если даже подвергнуть электромагнитный потенциал калибровочному преобразованию $f \rightarrow f - c^{-1}\partial_t y$ и $\mathbf{\dot{A}} \rightarrow \mathbf{\dot{A}} + \nabla y$ (здесь $y(\mathbf{r}, t)$ есть произвольное скалярное поле). Чтобы избежать неоднозначности представления электромагнитного потенциала, накладывают на потенциалы Лоренцеву калибровку [Ландау и Лифшиц, 1988]

$$-\frac{1}{4} \text{Trace } \mathbf{D} \cdot \mathbf{\Pi} = \frac{1}{c} \partial_t f + \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z = 0\tag{35}$$

Теперь давайте распишем произведение $\mathbf{D} \cdot \mathbf{\Pi}$ детально

$$\begin{aligned}\mathbf{D} \cdot \mathbf{\Pi} &= \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) h_0 \\ &+ \left(i \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \right) h_x \\ &+ \left(i \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right) h_y \\ &+ \left(i \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right) h_z\end{aligned}\tag{36}$$

Член при кватернионе h_0 представляет Лоренцеву калибровку (35). Таким образом, этот член исчезает. Остаются только члены при h_x, h_y, h_z . Согласно уравнениям (34), они

представляют x, y, z -компоненты электрического и магнитного полей. Уравнение (36) представляет тензор электромагнитного поля в несколько своеобразной форме

$$\mathbf{F}_{EM} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & B_x - iE_x & B_y - iE_y & B_z - iE_z \\ -B_x + iE_x & 0 & -B_z + iE_z & B_y - iE_y \\ -B_y + iE_y & B_z - iE_z & 0 & -B_x + iE_x \\ -B_z + iE_z & -B_y + iE_y & B_x - iE_x & 0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

Данный тензор составлен из суперпозиции двух тензоров электромагнитных полей, в которых взаимозаменяемы компоненты полей, а именно $-\dot{\mathbf{B}} \leftrightarrow i\dot{\mathbf{E}}$. Магнитное поле является *реальным*, но электрическое поле, как видно, представлено *мнимым*.

3.1. Уравнения электромагнитного поля

Давайте теперь посмотрим, как выполняется основной набор уравнений Максвелла с позиций вышеприведенного тензора электромагнитного поля. Этот набор представлен двумя парами уравнений [Ландау и Лифшиц, 1988]:

- первая пара уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \dot{\mathbf{B}} &= 0, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \dot{\mathbf{B}}}{\partial t} &= 0; \end{aligned} \quad (38)$$

- вторая пара уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{B}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \dot{\mathbf{E}}}{\partial t} &= \frac{4p}{c} \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} &= 4p r. \end{aligned} \quad (39)$$

Во второй паре справа появляются новые члены – плотность заряда

$$r = ed(\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_0) \quad (40)$$

и трехмерная плотность тока

$$\mathbf{j} = r \dot{\mathbf{v}}. \quad (40)$$

Здесь e - заряд и $\dot{\mathbf{v}}$ - скорость заряда в окрестности точки $\dot{\mathbf{r}}$. Для простоты мы имеем дело только с одним зарядом, движущимся в направлении $\dot{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{v}}/v$. Движение заряда подчиняется уравнению непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial t} = 0. \quad (41)$$

Теперь определим кватернионную форму 4-вектор плотности тока

$$\mathbf{J} = -icr h_0 + j_x h_x + j_y h_y + j_z h_z \quad (42)$$

Уравнение непрерывности может быть переписано в форме

$$\frac{1}{4} \text{Trace } \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{J} = \partial_t r + \partial_x j_x + \partial_y j_y + \partial_z j_z = 0. \quad (43)$$

Первая и вторая пары уравнений Максвелла, (38) и (39), следуют из уравнения

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{F}_{\text{EM}} = \frac{4p}{c} \mathbf{J}. \quad (44)$$

На самом деле, расписывая детально произведение $\mathbf{D} \cdot \mathbf{F}_{\text{EM}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}_{\text{EM}} &= \left\{ (\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z) - i(\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z) \right\} h_0 \\ &+ \left\{ \left(-\frac{1}{c} \partial_t E_x + (\partial_y B_z - \partial_z B_y) \right) + i \left(-\frac{1}{c} \partial_t B_x - (\partial_y E_z - \partial_z E_y) \right) \right\} h_x \\ &+ \left\{ \left(-\frac{1}{c} \partial_t E_y + (\partial_z B_x - \partial_x B_z) \right) + i \left(-\frac{1}{c} \partial_t B_y - (\partial_z E_x - \partial_x E_z) \right) \right\} h_y \\ &+ \left\{ \left(-\frac{1}{c} \partial_t E_z + (\partial_x B_y - \partial_y B_x) \right) + i \left(-\frac{1}{c} \partial_t B_z - (\partial_x E_y - \partial_y E_x) \right) \right\} h_z \\ &= \frac{4p}{c} (-i c r h_0 + j_x h_x + j_y h_y + j_z h_z), \end{aligned} \quad (45)$$

и приравнивая соответствующие члены в левой и правой частях этого уравнения, сразу обнаруживаем равенство (44). Первая пара уравнений Максвелла, набор (38), отвечает реальной части при кватернионе h_0 и мнимой части при кватернионах h_x, h_y, h_z . И наоборот, вторая пара уравнений Максвелла, набор (39), отвечает мнимой части при h_0 и реальной части при кватернионах h_x, h_y, h_z .

3.2. Преобразования Лоренца

Следует убедиться, что электрическое и магнитное поля, представленные в тензоре электромагнитного поля \mathbf{F}_{EM} , будут преобразовываться правильно при переходах в другие системы координат в процессе преобразований Лоренца. Прежде следует определить сам процесс преобразования: преобразование 4-мерного пространства-времени, натянутого на кватернионный базис (h_0, h_x, h_y, h_z) , осуществляется матрицами вида

$$L = v_0 h_0 + v_x h_x + v_y h_y + v_z h_z, \quad L^T = v_0 h_0 - v_x h_x - v_y h_y - v_z h_z. \quad (46)$$

Потребуем, чтобы всегда выполнялось произведение $L \cdot L^T = L^T \cdot L = h_0$. Отсюда следует, что на параметры v_0, v_x, v_y, v_z накладывается ограничение

$$v_0^2 + v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 1. \quad (47)$$

Два типа преобразований – поворот системы координат в трехмерном пространстве и переход в движущуюся систему координат (буст (boost) [Пенроуз и Риндлер, 1988]) – в представлении данных матриц расписывается как:

- преобразования системы координат пространства Минковского, связанным с поворотом вокруг оси $\mathbf{\hat{m}} = (m_x, m_y, m_z)$ на угол a , отвечают параметры

$$v_0 = \cos\left(\frac{a}{2}\right), \quad \mathbf{r} = \mathbf{\hat{m}} \cdot \sin\left(\frac{a}{2}\right); \quad (48)$$

- преобразования системы координат при бусте в направлении оси $\mathbf{\hat{m}} = (m_x, m_y, m_z)$ на величину $b = v/c$ (v - скорость перемещения лабораторной системы координат, c - скорость света), отвечают параметры

$$v_0 = \cosh\left(\frac{b}{2}\right), \quad \mathbf{r} = i \mathbf{\hat{m}} \cdot \sinh\left(\frac{b}{2}\right). \quad (49)$$

Буст представляет ни что иное, как поворот (48) на мнимый угол $a = ib$.

При переходе к новой системе координат тензор электромагнитного поля \mathbf{F} подвергается преобразованиям [Пенроуз и Риндлер, 1988]

$$\mathbf{F}'_{EM} = L \cdot \mathbf{F}_{EM} \cdot L^T. \quad (50)$$

После ряда утомительных вычислений находим 3×3 матрицу

$$R(\mathbf{r}) = 2v_0 \begin{pmatrix} 0 & v_z & -v_y \\ -v_z & 0 & v_x \\ v_y & -v_x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-2(v_y^2+v_z^2) & 2v_x v_y & 2v_x v_z \\ 2v_y v_x & 1-2(v_z^2+v_x^2) & 2v_y v_z \\ 2v_z v_x & 2v_z v_y & 1-2(v_x^2+v_y^2) \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Данная матрица преобразовывает комплексное векторное поле $\mathbf{\hat{F}}$ при переходе к новой системе координат согласно следующему закону

$$\mathbf{\hat{F}}' = \begin{pmatrix} -B'_x + iE'_x \\ -B'_y + iE'_y \\ -B'_z + iE'_z \end{pmatrix} = R(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} -B_x + iE_x \\ -B_y + iE_y \\ -B_z + iE_z \end{pmatrix} = R(\mathbf{r}) \mathbf{\hat{F}}. \quad (52)$$

Расписывая в явном виде это преобразование для случая поворота системы координат (48) пространства Минковского и для случая буста (49) этого же пространства будем иметь следующие преобразования [Baylis & Jones, 1988, 1989a, 1989b]:

- при повороте системы координат вокруг оси $\mathbf{\hat{m}}$ на угол a

$$\mathbf{\hat{F}}' = \mathbf{\hat{F}} \cdot \cos(a) + \mathbf{\hat{m}}(\mathbf{\hat{m}} \cdot \mathbf{\hat{F}}) \cdot (1 - \cos(a)) - [\mathbf{\hat{m}} \times \mathbf{\hat{F}}] \cdot \sin(a) \quad (53)$$

- при бусте вдоль оси $\mathbf{\hat{m}}$ на величину b

$$\dot{\mathbf{F}}' = \dot{\mathbf{F}} \cdot \cosh(b) + \dot{\mathbf{m}}(\dot{\mathbf{m}} \cdot \dot{\mathbf{F}}) \cdot (1 - \cosh(b)) - i[\dot{\mathbf{m}} \times \dot{\mathbf{F}}] \cdot \sinh(b) \quad (54)$$

Таким образом, при поворотах (53) системы координат электрическое и магнитное поля преобразуются независимо. Тогда как при бусте (54), из-за наличия мнимой единицы в последнем слагаемом, эти поля перемешиваются.

3.3. Квадратичные формы тензора электромагнитного поля

Квадратичная форма

$$\mathbf{F}_{EM} \cdot \mathbf{F}_{EM}^* = -W_0 h_0 + iW_x h_x + iW_y h_y + iW_z h_z \quad (55)$$

несет информацию о плотности и потоке энергии электромагнитного поля. А именно, форма $W_0 = (E^2 + B^2)$ представляет плотность энергии, а $\dot{\mathbf{W}} = 2 \cdot \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{B}}$, описывающий поток энергии, называют вектором Пойтинга. Значок * в уравнении (55) представляет операцию комплексного сопряжения - $(\dot{\mathbf{B}} - i\dot{\mathbf{E}})^* = (\dot{\mathbf{B}} + i\dot{\mathbf{E}})$.

Вторая квадратичная форма есть

$$\mathbf{F}_{EM}^T \cdot \mathbf{F}_{EM} = \left\{ (B^2 - E^2) - 2i(\dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{B}}) \right\} h_0. \quad (56)$$

Здесь $(E^2 - B^2)$ является скалярной величиной, а $(\dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{B}})$ представляет псевдоскаляр. Обе эти величины инвариантны относительно преобразований Лоренца.

4. Заключительные замечания

Необычный вид тензора электромагнитного поля \mathbf{F}_{EM} обусловлен тем, что оба поля – магнитное и электрическое – входят симметричным образом в (37). Одно качественное отличие представленных полей все же существует. Это отличие в том, что одно из них (электрическое поле) фигурирует с мнимой единицей, тогда как магнитное поле представлено как реальное поле. Казалось бы, должна быть обратная картина, так как электрический заряд есть физическая реальность, а магнитных зарядов не обнаружено. С другой же стороны, диполи могут быть обоих типов - как магнитные, так и электрические. Первые являются аксиальными диполями, а вторые полярными.

Магнитные диполи, в отличие от электрических, являются крошечными волчками, представленными спинами частиц. В частности, о спине можно говорить как о физической реальности в том и только том случае, если существует нечто, по отношению к чему спин может быть наблюдаемым. Этим нечто как раз и является магнитное поле, которое проявляется как поле квантования спина. В данной работе взаимодействие спина с магнитным полем проявляется через реальную часть тензора электромагнитного поля:

$$m_B \cdot \text{Re}(\mathbf{F}_{EM}) = m_B \cdot \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -B_z & B_y \\ -B_y & B_z & 0 & -B_x \\ -B_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (57)$$

По аналогии можно определить *электрический дипольный момент* d_e (ЭДМ), так как за кадром остается еще мнимая часть тензора электромагнитного поля. Эта часть тензора могла бы описывать подобное же взаимодействие с ЭДМ, а именно

$$id_e \cdot \text{Im}(\mathbf{F}_{EM}) = id_e \cdot \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & E_z & -E_y \\ E_y & -E_z & 0 & E_x \\ E_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (58)$$

При сравнении формул (57) и (58) видно, что представления магнитного и электрического полей через кватернионные матрицы не вполне эквивалентны. Так как спин частицы является аксиальным вектором, а электрический диполь полярным вектором, в форме (58), по этой причине, фигурирует мнимая единица. Тригонометрические функции, из-за присутствия мнимой единицы, обращаются в гиперболические функции (смотри, например, уравнения (6) - здесь место тригонометрических синусов и косинусов займут гиперболические). Это означает, что вместо прецессии вокруг электрического поля, электрический дипольный момент будет выстраиваться параллельно полю. При этом поле стремится «растачить» дипольные заряды к своим полюсам, поскольку гиперболические функции (синус и косинус) расходятся с возрастанием аргумента этих функций.

Так как существование ЭДМ тесно связано с дискретными преобразованиями (а именно - изменение направления оси времени, инверсия пространственных координат, зарядовое сопряжение) поиску его, как ЭДМ нейтронов [Шабалин, 1983; Федоров, 1999; Hecht *et al.*, 2001; Golub & Huffman, 2005], так и ЭДМ электронов [Крашенников, 2002; Hudson *et al.*, 2008], уделяется пристальное внимание. На настоящий момент измерены верхние границы на существование ЭДМ, т.е., если ЭДМ (электрона) существует, его величина $|d_e|$ лежит ниже $3 \cdot 10^{-26} [e \cdot m]$.

Литература

- Baker, M. J., [2008] "Maths - Quaternions," in <http://www.euclideanspace.com/maths/algebra/realNormedAlgebra/quaternions/>
- Baylis, W. E. ed., [1996] *Clifford (Geometric) Algebra with Applications to Physics, Mathematics, and Engineering*, (Birkhauser, Boston)
- Baylis, W. E. and Jones, G., [1988] "Special relativity with Clifford Algebras and 2x2 matrices, and the exact product of two boosts," *J. Math. Phys.*, **29**, 57-62.
- Baylis, W. E. and Jones, G., [1989] "Pauli algebra approach to special relativity," *J. Phys. A: Math.*, **22**, 1-16
- Baylis, W. E. and Jones, G., [1989] "Relativistic dynamics of changes in external fields: the Paul algebra approach," *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**, 17-29.
- Baylis, W. E. and Sobczyk, G., [2004] "Relativity in Clifford's Geometric Algebras of Space and Spacetime," *International Journal of Theoretical Physics*, **43**(10), 2061-2079.
- Bohm, D., [1952] "A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "Hidden Variables," *Physical Review*, **85**, 166-193.
- Esposito, G., Marmo, G. and Sudarshan, G., [2004] *From classical to quantum mechanics*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge)
- Golub, R. and Huffman, P. R., [2005] "Search for a Neutron Electric Dipole Moment," *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.*, **110**(3), 169-172.
- Hecht, M. B., Roberts, C. D. and Schmidt, S. M., [2001] "Neutron electric dipole moment: Constituent-dressing and compositeness," http://arxiv.org/PS_cache/nucl-th/pdf/0101/0101058v2.pdf
- Hudson, J. J., Sauer, B. E., Tarbutt, M. R. and Hinds, E. A., [2008] "Measurement of the electron electric dipole moment using YbF molecules," http://xxx.lanl.gov/PS_cache/hep-ex/pdf/0202/0202014v2.pdf
- Nave, R., [2005] "Diffraction,"

<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/Hbase/phyopt/diffracn.html>

(Department of Physics and Astronomy, Georgia State University)

Wikipedia(a), [2008] "Pauli equation," http://en.wikipedia.org/wiki/Pauli_equation

Wikipedia(b), [2008] "Gyromagnetic ratio," http://en.wikipedia.org/wiki/Gyromagnetic_ratio

Wikipedia(c), [2008] "Levi-Civita symbol," http://en.wikipedia.org/wiki/Levi-Civita_symbol

Wikipedia(d), [2008] "Geometric algebra," http://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_algebra

Википедия(а), [2008] "Лампа бегущей волны,"

http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B0%D0%BC%D0%BF%D0%B0_%D0%B1%D0%B5%D0%B3%D1%83%D1%89%D0%B5%D0%B9_%D0%B2%D0%BE%D0%BB%D0%BD%D1%8B

Займан, Дж., [1971] *Современная квантовая теория*, (Мир, М.)

Каминский, А. В., [2005] "О скрытой природе спина," *Квантовая Магия*, **2**(2), 2114-2131.

Крашенинников, А. П., [2002] "Дипольный момент электрона: измерения в молекулярных пучках," <http://nature.web.ru/db/msg.html?mid=1180004&s=>

Ландау, Л. Д. and Лифшиц, Е. М., [1988] *Теория поля, том II*, (Наука, М.)

Пенроуз, Р. and Риндлер, В., [1988] {*ит* Спиноры и пространство-время: Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени, } (Мир, М.)

Полуян, П. В., [2002] "Нестандартный анализ неклассического движения,"

<http://res.krasu.ru/non-standard/>

Полуян, П. В., [2005] "Неклассическая онтология и неклассическое движение," *Квантовая магия*, **2**(3), 3119-3134.

Румер, Ю. Б., [1936] *Спинорный анализ*, (Объединенное научно-техническое изд. НКТП СССР, Москва, Ленинград)

Сбитнев, В. И., [2008] "Бомовское расщепление уравнения Шредингера на два уравнения, описывающих эволюцию реальных функций," *Квантовая Магия*, **5**(1), 1101-1111.

Федоров, В. В., [1999] "Электрический дипольный момент нейтрона: новые возможности поиска," *Природа*, (6), 74-83.

Шабалин, Е. П., [1983] "Электрический дипольный момент нейтрона в калибровочной теории," *УФН*, **139**(4), 561-585.

Янчилин, В., [2006] "Почему проекция момента импульса всегда принимает целочисленные значения вдоль любой произвольно ориентированной оси?" *Квантовая Магия*, **3**(1), 1116-1129.