Квантовая Магия, том 4, вып. 4, стр. 4124-4133, 2007

Сепарабельные состояния

С.И. Доронин

(Получена 26 августа 2007; опубликована 15 октября 2007)

Данная статья не содержит оригинальных результатов. Если отбросить философские соображения в начале текста, оставив содержательную часть, то ее можно рассматривать в качестве учебного материала – лекции, которая достаточно подробно знакомит с понятием сепарабельности, сформировавшимся к настоящему времени в теоретической физике.

В старых учебниках по квантовой механике вы не найдете материала о сепарабельных состояниях. Определение этому понятию, в его современной формулировке, было предложено относительно недавно в 1989 г. Вернером [1], и лишь к концу прошлого века это определение было достаточно подробно проанализировано, осмыслено и окончательно утвердилось в научной среде. Учебного материала на эту тему пока немного, еще меньше на русском языке. Впрочем, в наших престижных вузах преподаватели стараются не отставать от современной науки и пытаются дать студентам материал на эту тему. Из лекций, доступных в Интернете, могу сослаться на курс теоретической физики, читаемый на Физтехе [2], где в отдельной главе дается краткое введение в эту тему, причем этот материал предлагается гуманитариям (студентам экономических специальностей в данном случае). Что вполне естественно, поскольку не только физики-специалисты должны знать об этом. Научные представления о сепарабельности/несепарабельности стали сейчас неотъемлемой частью теоретической физики и, следовательно, они участвуют в формировании наших естественнонаучных взглядов на окружающую реальность, поэтому знать о них должен любой образованный человек.

Недостаток информации в этой области послужил мотивацией для написания данной статьи. Надеюсь, она поможет тому, кто интересуется последними достижениями квантовой теории, и кто хочет больше узнать о современных научных представлениях об окружающем мире. Наука сейчас развивается очень быстро, особенно квантовая физика, и многое из того, что изложено в учебниках по квантовой механике полувековой давности сейчас потеряло свою актуальность. Те подходы, а также задачи и примеры, которые рассматриваются в этих учебниках, уже давно никого не интересуют. Сейчас ученые решают совсем другие задачи, и на одном из первых мест здесь стоит изучение несепарабельных состояний, но чтобы подойти к ним, необходимо хорошо представлять, что такое сепарабельные состояния.

Я не исключаю, что будущие учебники по квантовой теории, которые сейчас пишутся, будут начинаться с понятия сепарабельности и с объяснения того, в чем заключается принципиальное различие между сепарабельными и несепарабельными состояниями. Более того, я полагаю, что здесь проходит основной водораздел, разделяющий классическую физику от квантовой, и именно с несепарабельных состояний начинается настоящая квантовая физика.

Понятия сепарабельности и несепарабельности – одни из самых фундаментальных в физике. Классическая физика не акцентирует на этом внимание, поскольку она по умолчанию имеет дело только с сепарабельными состояниями. Несепарабельности для нее не существует «по определению», она ее не учитывает и исключает из рассмотрения.

Сепарабельность для классической физики, как бы сама собой разумеется, иного она не знает, это ее основа и предел, ограничивающий сферу применения ее законов. Все привычные для нас естественнонаучные представления об окружающей реальности, вся классическая физика, все её законы, известные к настоящему времени, описывающие материальный мир (вещество и физические поля) – всё это очень ограниченное описание реальности исключительно в рамках сепарабельных состояний, когда более широкий, и более богатый по своим физическим проявлениям, класс несепарабельных состояний не принимается во внимание. Несепарабельность для классической физики – это нечто сверхъестественное, то, что не укладывается в рамки созданной на ее основе «картины мира». В то время как окружающая нас Реальность намного сложнее наших устоявшихся предубеждений, и в ней очень много того, что не может быть понято и объяснено, если мы ограничиваемся рассмотрением одних только сепарабельных состояний.

Квантовая физика тоже достаточно долгое время ограничивалась описанием сепарабельных состояний. Лишь в последнее десятилетие на первый план вышли именно несепарабельные состояния*. Ученые обратили самое пристальное внимание на их необычные, прямо-таки «сверхъестественные» возможности, которые являются очень перспективными в плане практического применения. Началось детальное изучение несепарабельности (квантовой запутанности) в научных лабораториях. Сейчас уже эти исследования дают практическую отдачу, и квантовая запутанность находит все более широкое применение в технических устройствах в качестве основного рабочего ресурса.

* Более подробно об этом можно прочитать в книге «Квантовая Магия» http://www.ppole.ru/doronin/QuantumMagic/cont.html , в частности, во второй главе параграф 2.8. посвящен сепарабельным и несепарабельным состояниям http://www.ppole.ru/doronin/QuantumMagic/28.html .

Квантовая физика способна описать как сепарабельные, так и несепарабельные состояния, да и само различие между этими состояниями может быть осмыслено только в рамках квантового подхода, поскольку, как уже говорилось, в классической физике несепарабельность исключается из рассмотрения. Можно также отметить, что выход за пределы сепарабельных состояний, когда мы обращаемся к состояниям несепарабельным, означает и выход за пределы классической физики. От себя я бы еще добавил, что в этом случае мы вступаем в «потустороннюю» для привычных представлений область квантовых уровней Реальности, попадаем в сферу того самого «тонкого мира» или «Царства Небесного» – мира нелокальных квантовых корреляций, характерные особенности которого изложены в религиозных и мистических учениях. И все эти знания, накапливаемые тысячелетиями, на мой взгляд, как нельзя лучше пересекаются с современными представлениями о несепарабельных состояниях. Но осмыслить этот момент и увидеть явные параллели невозможно в рамках старых классических представлений. Необходимо хоть в какой-то степени понимать и уметь оперировать основными понятиями, терминами и теоретическим аппаратом квантовой механики. На привычном языке классической физики, даже в предположении о существовании неких гипотетических энергоинформационных полей, просто невозможно объяснить и понять суть несепарабельности. С другой стороны, вывод о наличии в окружающем мире самых различных энергоинформационных структур в качестве объективных элементов Реальности – прямое следствие квантового подхода, когда мы учитываем несепарабельные состояния. Физическая природа тонкого мира и «населяющих» его тонкоматериальных квантовых структур не может быть понята в терминах классической физики при любом полевом подходе (даже в рамках пресловутой Единой Теории Поля), поскольку физическая суть несепарабельности гораздо более глубокая, чем все те возможные объяснения, которые могли бы предложить даже самые перспективные полевые теории. Все они ограничиваются рассмотрением сепарабельных состояний.

Под сепарабельностью (от лат. separo - отделять) в широком смысле понимают возможность разделения объекта на отдельные составные части с сохранением их свойств. В русском языке есть однокоренные слова, которые несут тот же смысл, – сепаратор, сепаратизм и т.д. Для начала можно сформулировать следующее предварительное определение.

Сепарабельность — это отделимость частей составной системы в качестве самостоятельных и *полностью* независимых объектов. Такая полная отделимость означает, что, например, для системы, состоящей из двух частей A и B, действия, выполненные над подсистемой A, не изменяют свойства подсистемы B.

На языке математики в квантовой механике это определение формализуется следующим образом. Если есть двусоставная система, описываемая единым вектором состояния Ψ_{AB}, и этот вектор состояния можно представить в виде прямого (тензорного) произведения векторов состояния отдельных подсистем Ψ_A и Ψ_B, т.е. если имеет место равенство

$$\Psi_{AB} = \Psi_A \otimes \Psi_B , \qquad (1)$$

то это состояние называется сепарабельным.

Размер каждой из подсистем A и B может быть самый разный, в том числе и макроскопический, не обязательно это должны быть однокубитные состояния.

Для многосоставной системы, находящейся в чистом состоянии и состоящей из N подсистем, можно дать определение *полной* сепарабельности.

$$\Psi = \Psi_1 \otimes \Psi_2 \otimes \ldots \otimes \Psi_N , \qquad (1')$$

Знак тензорного произведения в выражениях (1) и (1') несет основную смысловую нагрузку. Именно он свидетельствует о том, что подсистемы полностью независимы друг от друга в выбранном представлении вектора состояния с соответствующими наблюдаемыми величинами.

Сразу можно отметить, что такое разложение вектора состояния на прямое произведение в виде (1) или (1') возможно далеко не всегда, и если этого не удается сделать, то такое состояние называется *несепарабельным*.

Самый простой пример сепарабельного состояния – двухкубитная система, когда каждый из кубитов* находится в своем независимом и строго определенном (локальном) состоянии, например кубит A направлен «спин-вверх», а второй кубит B – «спин-вниз». В дираковских обозначениях такое двухкубитное состояние записывается

$$|\Psi_{AB}\rangle = |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B \equiv |01\rangle . \qquad (2)$$

* О том, что такое кубит, вектор состояния и другие основные понятия квантовой теории см. книгу «Квантовая Магия» http://www.ppole.ru/doronin/QuantumMagic/cont.html

Сепарабельность может иметь место и для суперпозиции состояний, так, состояние $|\Psi_{AB}\rangle = \sqrt{1/2}\left(|00\rangle + |10\rangle\right)$, если воспользоваться свойствами тензорного умножения, может быть представлено в форме (1)

$$|\Psi_{AB}\rangle = \sqrt{1/2}\left(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B\right) = \sqrt{1/2}\left(|0\rangle_A + |1\rangle_A\right) \otimes |0\rangle_B = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle,$$

где $|\Psi_A\rangle = \sqrt{1/2}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)$ – нелокальное суперпозиционное состояние первого кубита, и $|\Psi_B\rangle = |0\rangle$ – локальное («спин-вверх») состояние второго кубита.

В то же самое время другое, похожее на него, суперпозиционное состояние $|\Psi_{AB}\rangle = \sqrt{1/2}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$, так называемое *cat*-состояние (шрёдингеровского кота), не может быть записано в виде (1). Это *несепарабельное* состояние.

Другой интересный пример сепарабельности – это равновесное состояние, когда в векторе состояния присутствуют все возможные базисные состояния с равными весами. Для двухкубитной системы это

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle .$$

Значения равновесных амплитуд (в данном случае 1/2) определяются из условия нормировки – квадраты всех амплитуд в сумме должны давать единицу. Это состояние тоже является сепарабельным, поскольку оно может быть представлено в виде

$$|\Psi_{AB}\rangle = \sqrt{1/2}\left(|0\rangle_A + |1\rangle_A\right) \otimes \sqrt{1/2}\left(|0\rangle_B + |1\rangle_B\right).$$

Его отличительная особенность в том, что каждая из подсистем в этом случае находится в нелокальном суперпозиционном состоянии $\sqrt{1/2}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)$. Аналогичное разложение будет иметь место для равновесного состояния систем, состоящих из произвольного числа подсистем:

$$|\Psi_{AB\ldots N}\rangle = \sqrt{1/2}\left(|0\rangle_A + |1\rangle_A\right) \otimes \sqrt{1/2}\left(|0\rangle_B + |1\rangle_B\right) \otimes \mathbf{K} \otimes \sqrt{1/2}\left(|0\rangle_N + |1\rangle_N\right).$$

Определение в форме (1) мы пока сформулировали только для чистых состояний, т.е. для тех систем, которые можно описать вектором состояния. В большинстве случаев мы имеем дело с состояниями смешанными, которые не описываются вектором состояния, но могут быть формализованы в терминах матрицы плотности. Поэтому сейчас мы постараемся перейти к более общему определению сепарабельности, которое будет справедливо уже для произвольных систем.

В качестве первого шага, запишем (1) в эквивалентной форме через матрицы плотности. Для этого вместо векторов состояния нужно записать проекторы: $r_{AB} = |\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}|$, $r_A = |\Psi_A\rangle\langle\Psi_A|$, $r_B = |\Psi_B\rangle\langle\Psi_B|$. В результате произведения вектор-столбцов на комплексно сопряженные вектор-строки получаем матрицы плотности, соответствующие чистым состояниям (они имеют единичный ранг). Тогда (1) мы можем записать в терминах матрицы плотности

$$r_{AB} = r_A \otimes r_B. \tag{3}$$

Это определение сепарабельных состояний по-прежнему справедливо только для чистых состояний.

На следующем шаге перейдем к состояниям смешанным. Матрица плотности любого смешанного состояния может быть представлена в виде линейной комбинации матриц плотности чистых состояний (проекторов). Например, максимально смешанное состояние двухсоставной системы (скалярная матрица плотности)

$$r = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \tag{4}$$

может быть представлена в виде суммы четырех чистых состояний.

$$r = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Или, записывая ее через проекторы, $r = \frac{1}{4}|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{4}|01\rangle\langle 01| + \frac{1}{4}|10\rangle\langle 10| + \frac{1}{4}|11\rangle\langle 11|$.

При таком разложении основное ограничение накладывается на весовые множители (в данном случае 1/4), они должны быть положительными и в сумме давать единицу. В физическом смысле их можно трактовать как вероятности отдельных состояний, с общей вероятностью исходного состояния, равной 1.

В общем виде это записывают следующим образом

$$r = \sum_i w_i r_i = \sum_i w_i |y_i\rangle\langle y_i|, \tag{6}$$

где $0 \le w_i \le 1$, $\sum_i w_i = 1$. В таком виде может быть представлена любая матрица плотности, как чистого, так и смешанного состояния. В случае чистого состояния в сумме (6) будет лишь одно слагаемое с единичной вероятностью.

Разложение (6) для некоторого смешанного состояния может быть неединственным. Например, матрицу плотности

$r = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ можно представить в виде $r = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Но эту же матрицу плотности можно разложить иначе и записать

$$r = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

В последнем случае смешиваются тоже два чистых состояния, причем это два максимально запутанных белловских состояния, в отличие от предыдущей суммы, где складывались два сепарабельных состояния. В силу своей неединственности, разложения (6) не играют особой роли в квантовой теории, но с их помощью можно сформулировать общее определение сепарабельных состояний, к которому мы сейчас подошли.

Определение. Состояние составной системы, состоящей из подсистем A и B, называется *сепарабельным* (классически коррелированным), если оно может быть аппроксимировано выпуклой комбинацией прямых произведений состояний ее подсистем [1].
В противном случае состояние называется *несепарабельным* (квантово коррелированным, запутанным).

Математически данное определение означает, что матрица плотности, характеризующая сепарабельное состояние, может быть записана в виде суммы

$$r = \sum_i w_i r_i^{(A)} \otimes r_i^{(B)}, \qquad (7)$$

где, как и выше, $0 \le w_i \le 1$, $\sum_i w_i = 1$. Эти два ограничения, накладываемые на w_i, и есть определение *выпуклой комбинации* – это линейная комбинация с неотрицательными коэффициентами, сумма которых равна единице.

В виде (7) определение сепарабельности справедливо для произвольных систем, находящихся как в чистом, так и в смешанном состоянии, и именно оно приводится обычно в научных публикациях.

В случае чистого исходного состояния выражение (7) сводится к (3). Для смешанного состояния такое разложение следует из (6), когда мы каждое слагаемое расписываем в виде тензорного произведения матриц плотности подсистем. Поскольку разложение (6) неединственное, необходимо проверить все возможные выпуклые комбинации. Если найдется хотя бы одно разложение, когда каждое слагаемое можно представить в виде прямого произведения, т.е. если мы получаем матрицу плотности в виде (7), то такое состояние будет сепарабельным. На практике непосредственный перебор всех возможных разложений некоторой матрицы плотности и проверка каждого такого варианта на сепарабельность в форме (7), задача зачастую невыполнимая, но делать это вовсе необязательно. Существуют так называемые критерии сепарабельности, которые позволяют легко проверить, имеет ли матрица плотности разложение (7), или в таком виде ее записать невозможно в принципе. О критериях сепарабельности и мерах запутанности мы будем говорить отдельно, а пока более подробно остановимся на определении (7) и разберем его на отдельных примерах.

Для многосоставной системы по аналогии с (1') также можно привести определение *полной* сепарабельности, т.е. отделимости всех ее подсистем

$$r = \sum_i w_i r_i^1 \otimes r_i^2 \otimes \mathbf{L} \otimes r_i^N , \qquad (7')$$

Приведем примеры. Одна из самых простых ситуаций – максимально смешанное состояние, матрица плотности которого для двухкубитной системы, а также ее разложение, уже приводилось, см. (4) и (5). Строго говоря, в выражениях (7) и (7') под матрицами плотности отдельных подсистем понимаются проекторы, т.е. исходная матрица плотности всей системы раскладывается на матрицы плотности чистых состояний ее подсистем. Однако иногда это требование смягчают. Делается это для упрощения и уменьшения числа слагаемых в разложении. Например, для матрицы плотности (4) можно записать более простое представление в виде тензорного произведения подсистем, по сравнению с разложением (5).

$$r = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Это разложение аналогично выражению (3). Его особенность в том, что матрицы плотности подсистем r_A и r_B уже не соответствуют чистым состояниям (не являются проекторами), это смешанные состояния. Однако очевидно, что если имеет место (8), то существует разложение (5). Таким образом, более простое тензорное произведение (8) позволяет сделать вывод о сепарабельности состояния (4).

Перейдем теперь к более сложному примеру, который поможет лучше понять определение сепарабельности в форме (7).

Рассмотрим так называемое состояние Вернера

$$r = (1-g)\frac{I}{4} + g\,|\Psi\rangle\langle\Psi|, \qquad (9)$$

где I – единичная матрица, а $|\Psi\rangle$ - одно из максимально запутанных белловских состояний. Для определенности возьмем вектор $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$, проектор которого равен

$$|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица плотности (9) будет иметь вид

$$r=\begin{pmatrix}\frac{1-g}{4} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1-g}{4}+\frac{g}{2} & \frac{g}{2} & 0\\ 0 & \frac{g}{2} & \frac{1-g}{4}+\frac{g}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-g}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1-g}{4} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1+g}{4} & \frac{g}{2} & 0\\ 0 & \frac{g}{2} & \frac{1+g}{4} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-g}{4}\end{pmatrix}.$$

Данный пример интересен тем, что несмотря на наличие недиагональных элементов в матрице плотности, при некоторых значениях g состояние будет оставаться сепарабельным, и лишь при превышении некоторого критического значения становится несепарабельным (при g >1/3). Классическая физика обычно имеет дело с максимально смешанными состояниями (диагональная матрица плотности), когда отсутствуют недиагональные элементы, но простого их наличия вовсе не достаточно для того, чтобы состояние стало несепарабельным и имели место нелокальные квантовые корреляции. Согласно известным критериям сепарабельности [3, 4], это состояние будет сепарабельным, т.е. матрица плотности может быть представлена в виде (7), когда $0 \le g \le 1/3$. Запишем матрицу плотности при значении g =1/3

$$r=\begin{pmatrix}1/6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 1/6 & 0\\ 0 & 1/6 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/6\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Это состояние сепарабельное, значит, существует разложение (7). Найдем его в явном виде. Одно из возможных разложений*:

$$r=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1/2 & i1/2\\ -i1/2 & 1/2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1/2 & i1/2\\ -i1/2 & 1/2\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1/2 & -i1/2\\ i1/2 & 1/2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1/2 & -i1/2\\ i1/2 & 1/2\end{pmatrix}+$$
$$+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}+$$
$$+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

* В Приложении приведены прямые произведения чистых состояний, которые здесь были использованы.

Условие выпуклости выполнено – все весовые множители положительны (равны 1/6) и их сумма равна 1. Непосредственной проверкой можно убедиться, что это разложение дает искомую матрицу (10).

$$r=\begin{pmatrix}1/12 & 0 & 0 & -1/12\\ 0 & 1/12 & 1/12 & 0\\ 0 & 1/12 & 1/12 & 0\\ -1/12 & 0 & 0 & 1/12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/12 & 0 & 0 & 1/12\\ 0 & 1/12 & 1/12 & 0\\ 0 & 1/12 & 1/12 & 0\\ 1/12 & 0 & 0 & 1/12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1/6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 1/6 & 0\\ 0 & 1/6 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/6\end{pmatrix}$$

При значении g >1/3 разложение (7) не существует, невозможно будет выполнить условие выпуклости, и состояние (9) будет несепарабельным.

Из приведенного примера видно, что даже в относительно простых случаях не так легко найти хоть какое-то разложение вида (7) для сепарабельных состояний, в данном случае, например, невозможно обойтись без комплексных чистых состояний. Еще более затруднительно сделать полный теоретический анализ задачи факторизации некоторой исходной матрицы плотности. Однако существуют другие способы, позволяющие ответить на вопрос, является состояние сепарабельным или нет. Основаны они на использовании критериев сепарабельности, но это уже тема отдельной статьи.

Приложение

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4\\ -1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4\\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4\\ -1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & i1/2 \\ -i1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1/2 & i1/2 \\ -i1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & i1/4 & i1/4 & -1/4 \\ -i1/4 & 1/4 & 1/4 & i1/4 \\ -i1/4 & 1/4 & 1/4 & i1/4 \\ -1/4 & -i1/4 & -i1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -i1/2 \\ i1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1/2 & -i1/2 \\ i1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -i1/4 & -i1/4 & -1/4 \\ i1/4 & 1/4 & 1/4 & -i1/4 \\ i1/4 & 1/4 & 1/4 & -i1/4 \\ -1/4 & i1/4 & i1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & i1/2 \\ -i1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1/2 & -i1/2 \\ i1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -i1/4 & i1/4 & 1/4 \\ i1/4 & 1/4 & -1/4 & i1/4 \\ -i1/4 & -1/4 & 1/4 & -i1/4 \\ 1/4 & -i1/4 & i1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -i1/2 \\ i1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1/2 & i1/2 \\ -i1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & i1/4 & -i1/4 & 1/4 \\ -i1/4 & 1/4 & -1/4 & -i1/4 \\ i1/4 & -1/4 & 1/4 & i1/4 \\ 1/4 & i1/4 & -i1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Матрицы плотности $\begin{pmatrix} 1/2 & -i1/2 \\ i1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1/2 & i1/2 \\ -i1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ – это проекторы чистых состояний $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i\,|1\rangle)$ и $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\,|0\rangle + |1\rangle)$ соответственно.

Литература

1. R.F. Werner, Phys. Rev. A **40**, 4277 (1989).
2. Ю.М. Белоусов, В.И. Манько, Курс теоретической физики для студентов экономических специальностей, http://theorphys.mipt.ru/courses/stat-eko.html См. Лекции семестр VII http://theorphys.mipt.ru/courses/stat-eko/part1_a5.pdf (610 кб), Глава 6.
3. A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
4. N.J. Cerf, C. Adami, and R.M. Gingrich, Phys. Rev. A **60**, 898 (1999).