Квантовая Магия, том 2, вып. 3, стр. 3108-3118, 2005

К квантовой теории гравитации

Александр Климец
aklimets@rambler.ru

(получена 28 марта 2005; опубликована 15 мая 2005)

В статье излагается новый подход к построению квантовой теории гравитации, основанный на квантовании преобразованного гравитационного уравнения Эйнштейна.

Вот уже более 70 лет физиками всего мира предпринимаются отчаянные попытки в создании теории, объединяющей два столпа современной физики: общую теорию относительности и квантовую теорию. Однако, несмотря на многолетние активные исследования, никто пока не смог сформулировать последовательную и полную квантовую теорию гравитации. Сегодня двумя ведущими кандидатами на квантовую теорию гравитации являются теория струн и теория петлевой квантовой гравитации[8], [10], [11]. Я не буду пробовать рассматривать эти подходы. Мне представляется, что оба они неверны. Ниже я изложу свой путь в построении квантовой теории гравитации.

Основное уравнение общей теории относительности является нелинейным уравнением, существенно нелинейным. Для гравитационных полей несправедлив принцип суперпозиции. Поэтому его квантово-механическое решение вызывает серьезные затруднения. Предпринимались попытки проанализировать это уравнение в случае слабых гравитационных полей, когда справедлив принцип суперпозиции ([1], с.195). Однако в целом квантовая теория гравитации еще не создана. Построение же квантовой гравитации в рамках теории струн (М-теории) [8] и в рамках петлевой квантовой гравитации [11] представляется необоснованным. Ранее мной было показано [3], [9], что на планковском уровне физическая материя существует только в чернодырном состоянии. То, что может быть допустимым в области сильных взаимодействий (одномерные струны, p-браны), становится невозможным для сильной гравитации. Поэтому струнные теории, теории квантовых гравитационных петель в рамках излагаемой ниже концепции квантовой теории гравитации являются неприемлемым вариантом.

Здесь мы рассмотрим не первоначальное уравнение Эйнштейна, а его преобразованный вариант. В этом случае формально оно упрощается, что дает возможность проанализировать его квантово-механически. При этом обнаруживается выход в область планковских масштабов и энергий, что, видимо, указывает на верность избранного пути.

Основное уравнение Эйнштейна имеет вид

$$R_{ik} - 1/2\, g_{ik} R - l\, g_{ik} = (8p\, k/c^4)\, T_{ik} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

где k - гравитационная постоянная, c - скорость света, l - космологический член.

Уравнение (1) можно проинтегрировать по гиперповерхности S^k.

$$\int (-g)^{1/2} (R_{ik} - 1/2\, g_{ik} R - \lambda\, g_{ik})\, d S^k = (8\pi\, k/c^4) \int (-g)^{1/2}\, T_{ik}\, d S^k \ldots\ldots (2)$$

где g - определитель метрического тензора g_{ik}. Тогда правая часть в (2) принимает вид

$$(8\pi\, k/c^4) \int (-g)^{1/2}\, T_{ik}\, d S^k = (4\pi\, 2\, k/c^3)\, P_i \ldots\ldots (3)$$

где P_i - 4-импульс массы (без учёта энергии-импульса гравитационного поля). Отметим, что 4-импульс P_i в данном случае не является сохраняющейся величиной. В гравитационном поле должен сохраняться не 4-импульс одной лишь материи, а 4-импульс материи вместе с гравитационным полем, которое описывается левой стороной уравнения (1). Последний же не учтен в выражении для T_{ik}. Но здесь мы рассматриваем только 4-импульс материи.

Левую часть уравнения (2) запишем следующим образом

$$\int (-g)^{1/2} (R_{ik} - 1/2\, g_{ik} R - \lambda\, g_{ik})\, d S^k = 4\pi\, R_i \ldots\ldots (4)$$

Каким образом можно интерпретировать величину R_i в (4) ? Если рассмотреть подынтегральное выражение в (4), то R_i будет представлять собой сумму сложных величин с размерностью длины. Тензор R_{ik} в (1) имеет размерность $см^{-2}$. Понятие кривизны, по определению, является величиной, обратной радиусу кривизны. Процедура интегрирования в (4) подразумевает увеличение степени подынтегрального выражения. В данном случае происходит преобразование от отрицательной второй степени к положительной первой степени. Величина R_i в (4) связана с гравитационным радиусом некоторой массы и является его i-той компонентой. В общей теории относительности просто нет других претендентов размерности длины, прямо пропорционально связанных с энергией-импульсом частицы, кроме ее гравитационного радиуса. Поэтому здесь нет никакой необходимости производить сложные вычисления равенства (4) и обосновывать справедливость указанной мной трактовки величины R_i как i-той компоненты гравитационного радиуса частицы.

Проинтегрированное уравнение Эйнштейна (1) принимает следующий простой вид

$$R_i = (2\, k/c^3)\, P_i \ldots\ldots (5)$$

В отличие от нелинейного уравнения (1) уравнение (5) по отношению к переменным R_i и P_i является линейным и представляет собой частный случай линейного уравнения вида $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$, где x - переменные, a - числа.

В (5) 4 - импульс P_i может быть равен

$$P_i = mc\, dx_i / ds$$

где m - масса частицы, dx_i / ds - ее 4 - скорость. В частности, в случае статического поля $dx_a / ds = 0$ $(a = 1, 2, 3)$, $dx_0 / ds = 1$ и из (5) мы будем иметь

$$R_0 = (2k/c^3)P_0 = (2k/c^3)mc(dx_0/ds) = (2k/c^2)m \qquad (5')$$

В (5') R_0 есть не что иное как гравитационный радиус частицы R_g. Таким образом, соотношение (5) является обобщением выражения для гравитационного радиуса частицы в случае нестатического поля.

Уравнение (5) можно записать также следующим образом

$$R_i = (2k/c^3)mc\, dx_i/ds = R_g U_i \qquad (5'')$$

где R_g - гравитационный радиус частицы, U_i - 4-скорость частицы. Отсюда $U_i = R_i / R_g$. .Сравните: $U_i = dx_i / ds$, а также $U_i = P_i / mc$.

Нетрудно видеть, что уравнение (5) аналогично также соотношению для гравитационного радиуса геона [3].

$$R_g = (2k/c^3)P$$

где P - импульс фотона, что указывает на их взаимосвязь.

На основании того, что в статическом случае уравнение (5') идентично выражению для гравитационного радиуса массы m, мы полагаем, что величина R_i является i -той компонентой гравитационного радиуса частицы в динамическом случае. Соотношение (5') является частным случаем соотношения (5), а именно в случае статического поля. Таковым, в частности, является статическое сферически-симметричное поле, создаваемое покоящимся сферически-симмметричным телом (решение Шварцшильда).

В общей теории относительности гравитационный радиус R_g играет примечательную роль. Действительно, встречаясь с тяжелым телом, надо прежде всего оценить его гравитационный радиус, и мы уже будем знать многое о величине эффектов, связанных с общей теорией относительности. Эффекты будут малыми, если мало отношение R_g / R. Этот безразмерный параметр (отношение гравитационного радиуса к расстоянию до центра притяжения) определяет масштаб изменения хода часов, отклонение лучей света вблизи края диска Солнца, смещение перигелия Меркурия. Эта же величина входит и в третий закон Кеплера (о чем автор и не подозревал). R_g входит и во все остальные оценки. Когда же расстояние R сравнивается с гравитационным радиусом, мы приходим к черной дыре [6]. Гравитационный радиус в общей теории относительности (ОТО) играет такую же роль, как и скорость света в специальной теории относительности (СТО). Горизонт событий черной дыры в ОТО аналогичен световому барьеру в СТО ([6],с.31-53), [7].

Такая роль гравитационного радиуса в ОТО обусловлена прежде всего тем, что основное уравнение Эйнштейна (1) фактически является уравнением (5) для i-той компонеты гравитационного радиуса R_i (в интегральной форме) в динамическом случае, частным проявлением которого и является статическое сферически-симметричное поле массы m с гравитационным радиусом R_g . Выдающаяся роль гравитационного радиуса обнаруживается и при рассмотрении уравнения (5) с квантово-теоретической точки зрения, о чем будет сказано ниже.

Теперь можно проанализировать уравнение (5) с квантово-теоретической точки зрения. Уравнение (5) является линейным уравнением. Поэтому для перехода к квантовой теории можно заменить динамические переменные R_i и P_i линейными операторами и, таким образом, существенно продвинуться в построении квантовой теории гравитации. Известно, что динамические соотношения классической механики можно перенести в том же виде в квантовую механику, если вместо физических величин в этих соотношениях использовать соответствующие эрмитовские (самосопряженные) операторы. Но полной формальной аналогии здесь все же не будет. Нужно учитывать то, что эти операторы могут не коммутировать. В координатном представлении уравнение (5) принимает вид

$$(\underline{P}_i - (c^3 / 2\, k)\, \underline{R}_i\,)y\ = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

где $\underline{P}_i$ - оператор 4-импульса, а $\underline{R}_i$ - оператор гравитационного радиуса. Из (7) получаем

$$- i\, \hbar\, (\partial\ y / \partial\ R^i)\ -\ c^3/2\, k\, (R_i\ y\,) = 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

где $\hbar$ - постоянная Планка.

Из (8) следует, что оператор величины R_i имеет вид

$$\underline{R}_i = -\, 2i\, l^2_p\, \partial / \partial\, R^i$$

где l_p - фундаментальная планковская длина, которая появляется здесь автоматически, а не вводится искусственно, как, например, в теории струн [8]. Видно также, что оператор $\underline{R}_i$ является самосопряженным оператором.

Исследование уравнения (8) должно позволить отыскать спектр возможных значений гравитационного радиуса черной дыры и отвечающие этим значениям амплитуды стационарных состояний черной дыры.

Частное решение (8) имеет вид.

$$y\ =\ y_0\, \exp\, [(i\, /\, 2l^2_p)\, R_i\, R^i] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(9)$$

Отметим, что в плоском пространстве-времени в прямоугольных декартовых координатах ковариантная и контравариантная компоненты вектора совпадают. В искривленном пространстве-времени (в криволинейных координатах) это уже не так. Отметим также, что ко- и контравариантные координаты относятся к одному и тому же вектору и связаны между собой равенством $R_i\ =\ g_{ik}\ R^k$. Этим равенством определяется переход от контравариантных компонент вектора к ковариантным. И наоборот, $g^{ik} R_k = R^i$.

Из (9) следует, что сопряженные компоненты гравитационного радиуса R_i и R^i в планковских масштабах не коммутируют между собой

$$\underline{R}_i\,\underline{R}^i - \underline{R}^i\,\underline{R}_i = -\,2i\,l^2_p \text{ .... } (10)$$

где $\underline{R}_i$ и $\underline{R}^i$ - операторы. Отсюда следует соотношение неопределенностей

$$\Delta\, R_i\, \Delta\, R^i \geq l^2_p \text{ …………………….. } (11)$$

Действительно, согласно определению 4-векторов, производные $\partial\ y/\ \partial\ R^i$ составляют ковариантный вектор, где $y\ =\ y\ (R^i)$ - скалярная функция. Тогда находим, что произведение операторов $\underline{R}_i$ и $\underline{R}^i$ некоммутативно

$$(\underline{R}_i\,\underline{R}^i - \underline{R}^i\,\underline{R}_i)\; y\;(R^i) \equiv -\,2i\,l^2_p \partial\,/\,\partial\,R^i\,[\,R^i\;y\;(R^i)] -$$

$$-\ R^i(-\,2i\,l^2_p\,)\,\partial\,/\partial\,R^i\,[\;y\;(R^i)] = -\,2i\,l^2_p\;y\;(R^i)$$

Подчеркнём, что по i в последнем уравнении нет суммирования. Видно, что соотношение неопределенностей (11) является следствием соотношения неопределенностей Гейзенберга для импульса и координаты и уравнения (5).

Известно, что содержащейся в классических соотношениях информации недостаточно для построения аппарата квантовой механики. Необходима дополнительная информация о свойствах коммутирования рассматриваемых операторов. Иначе говоря, классические соотношения должны быть дополнены перестановочными соотношениями. Именно в перестановочных соотношениях заключена та специфическая информация, без которой немыслим аппарат квантовой механики, в том числе и квантовой теории гравитации. В этой связи подчеркнем, что в правую часть найденных нами выше перестановочных соотношений входит специфическая квантово-гравитационная постоянная - квадрат планковской длины l^2_p. Переход от квантовой гравитации к классической гравитации требует положить $l^2_p\ =\ 0$. В этом случае все величины, входящие в перестановочные соотношения, начинают коммутировать и в результате квантово-гравитационные выражения превращаются в подлинные уравнения классической теории гравитации. Именно присутствие в правой части указанного равенства хотя и малой, но все же отличной от нуля постоянной l^2_p и должно обусловить все своеобразие квантово-гравитационных представлений.

Решая (5) в импульсном представлении (или учитывая, что $\Delta\ R_i = \hbar\ /\ \Delta P_i$) мы получим соответствующее соотношение неопределенностей для сопряженных компонент импульса P_i и P^i

$$\Delta\, P_i\, \Delta P^{\,i} \leq P^{\,2}_{\ p}$$

или проще

$$P^2 \leq P^2_p = \hbar\; c^{\,3}\,/\,k$$

т.е. импульс частицы не может быть больше планковского импульса $(\hbar\ c^3\ /\ k)^{1/2}$.

Соотношение неопределенностей (11) говорит о том, что пространство-время в планковских масштабах микроискривленно и его кривизна (или радиус кривизны R) флуктуирует. Из (11) следует, что гравитационный радиус черной дыры не может быть меньше планковской длины 10^{-33} см.

Можно также наряду с соотношениями $E = \hbar w$ и $P = \hbar k$ записать соотношение

$$R_i = 2 l_p^2 k_i$$

где k_i - волновой 4 - вектор. Родство этого соотношения и уравнения (5) очевидно. Достаточно подставить в (5) вместо P_i величину $\hbar k_i$.Отсюда видно, что гравитационный радиус черной дыры по мере ее "испарения" будет изменяться не как угодно, а лишь на величину $2l_p^2 k_i$. Следовательно, и положение горизонта событий черной дыры будет изменяться дискретным образом. Можно предположить, что черная дыра (при "испарении") излучает кванты с волновым вектором k_i при переходе от одного горизонта событий к другому горизонту событий порциями по аналогии с правилом частот Бора

$$R_i^n - R_i^m = 2l_p^2 k_i$$

где R_i^n и R_i^m - значение i-той компоненты гравитационного радиуса черной дыры в n-том и m-том состояниях. Видимо эти кванты являются ничем иным, как микроскопическими черными дырами (см. ниже). При образовании горизонта событий с наименьшим гравитационным радиусом l_p черная дыра живет неограниченно долго, так как ей некуда больше переходить. Здесь предсказывается стабильность планковской черной дыры.

Все полученные нами выше соотношения можно также интерпретировать следующим образом. В теории тяготения Ньютона притягивающее тело удобно характеризовать одной величиной, которая называется массой тела и обозначается символом M. В релятивистской теории тяготения Эйнштейна притягивающее тело удобно характеризовать величиной, которая имеет размерность длины и называется гравитационным радиусом R_g

$$R_g = (2k/c^2)M = (2k/c^3)Mc$$

если $k = c = 1$, то $R_g = 2M$.

Таким образом, в релятивистской теории тяготения роль массы играет гравитационный радиус тела.

Проинтегрированное уравнение Эйнштейна (5) приводит к соотношению (5")

$$R_i = R_g U_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5")$$

Сравнивая это соотношение с выражением для 4-импульса частицы с массой M

$$P_i = Mc\, U_i$$

мы приходим к выводу, что величину R_i нужно трактовать как "*гравитационный 4-импульс*" или "*импульс кривизны пространства-времени*".

В квантовой механике 4-импульс P_i имеет следующий вид

$$P_i = \hbar\ k_i$$

где k_i - волновой 4-вектор, $\hbar$ - квант действия.

Из соотношения (5) мы нашли, что

$$R_i = 2\ l^2_p k_i$$

Тогда, по аналогии с квантом энергии-импульса $P_i = \hbar\ k_i$, величину $R_i = 2\ l^2_p k_i$ мы должны назвать "*квантом кривизны пространства-времени*".

Оператор гравитационного 4-импульса имеет вид

$$\underline{R}_i = -\ 2i\ l^2_p\ \partial / \partial R^i$$

Сравнивая это выражение с оператором механического 4-импульса P_i

$$\underline{P}_i = -\ i\ \hbar\ (\partial / \partial R^i)$$

мы еще раз склоняемся к интерпретации величины R_i как гравитационного 4-импульса или энергии-импульса кривизны пространства-времени.

Кванты кривизны пространства-времени, равные $R_i = 2\ l^2_p\ k_i$ и создают гравитационное поле. Именно они, скорее всего, являются переносчиками гравитационных взаимодействий. Величина R_i представляет из себя i-тую компоненту гравитационного радиуса R_g черной дыры. Отсюда следует, что квантами гравитационного поля на планковском уровне, возможно, являются микроскопические черные дыры (виртуальные и реальные, как обладающие массой покоя, так и не обладающие массой покоя). Если переносчиками электромагнитных взаимодействий являются кванты света - фотоны, то переносчиками гравитационных взаимодействий, видимо, являются кванты кривизны гравитационного поля - микроскопические черные дыры, движущиеся со скоростью света.

Этот важный вывод является логическим следствием проквантованных гравитационных уравнений Эйнштейна (5) (высказанный здесь в форме гипотезы и требующий дополнительных исследований).

Величина l^2_p характеризует планковский уровень пространства-времени. На этом уровне вакуум, вероятнее всего, состоит из виртуальных планковских черных дыр.

Напомним, что появление ко- и контравариантных компонент тензоров непосредственно связано с относительным движением систем отсчета. Уже в СТО движущаяся со скоростью V система координат K' является косоугольной, что ведет к необходимости делать различие между ко- и контравариантными координатами ([5], стр.65). Отсюда, видимо, следует, что некоммутативность ко- и контравариантных компонент тензоров на планковском уровне отражает неуничтожимость движения, наличие на этом уровне флуктуаций кривизны пространства-времени.

Так как пространство-время является криволинейным, то в общем случае решение (9) необходимо записать следующим образом

$$y = y_0 \exp [(i / 2l^2_p) g_{ik} R^i R^k] ,$$

но с учетом того, что $g_{ik} R^k = R_i$, мы и получаем соотношение (9) . Видно также, что так как $U^i U_i = 1$, то

$$g_{ik} R^i R^k = R^i R_i = U^i R_g U_i R_g = R_g^2$$

$$dR_g^2 = g_{ik} dR^i dR^k$$

где R_g - гравитационный радиус. Поэтому (9) можно переписать следующим образом

$$y = y_0 \exp [i R_g^2 / 2l^2_p]$$

Отсюда следует соотношение неопределенностей, аналогичное (11)

$$(\Delta R_g)^2 \geq l^2_p$$

или

$$\Delta R_g \geq l_p$$

или, упрощая

$$R_g \geq l_p$$

Видно, что гравитационный радиус черной дыры не может быть меньше планковской длины 10^{-33} см.

Соотношение неопределенностей (11) можно переписать следующим образом

$$l^2_p / \Delta R_i \Delta R^i \leq 1$$

или, проще $l^2_p / R^2 \leq 1$, откуда следует, что

$$1 - l^2_p / R^2 \geq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(11')}$$

В ([2],[3]с.32) было показано, что для областей пространства-времени с размером R неопределённость метрического тензора – порядка l^2_p / R^2, что согласуется с (11'), если учесть, что компоненты метрического тензора имеют вид

$$g_{oo} = 1 - R_g / R = 1 - 2l^2_p / R^2$$

В инерциальной системе отсчета $g_{oo} = 1$, однако теперь мы видим, что в планковских масштабах эта величина даже в инерциальной системе отсчета должна иметь вид

$$g_{oo} = 1 - \Delta g = 1 - 2 l^2_p / R^2$$

В инерциальной системе отсчета в декартовой системе координат интервал dS определяется формулой

$$dS^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

В неинерциальной системе отсчета интервал dS имеет вид

$$dS^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

В инерциальной системе отсчета при пользовании декартовыми координатами величины g_{ik} равны

$$g_{oo}= 1,\ldots\ldots g_{11}= g_{22k}= g_{33} = - 1$$

Однако из вышеизложенного ясно, что g_{oo} в планковских масштабах будет равен

$$g_{oo}=1 - 2l^2_p / R^2$$

даже в инерциальной системе отсчета, т.е. меньше 1. Поэтому формула (13) справедлива только когда $dS >> l_p = 10^{-33}$ см. Отсюда также следует, что на планковском уровне пространство-время не квантуется. На этом уровне оно вообще не определено в силу свойств горизонта событий черных дыр для удаленного наблюдателя. На планковском уровне нельзя ввести падающую систему отсчета, так как все такие системы неизбежно превратятся в планковские черные дыры, то есть коллапсируют [3]. [9]. В действительности на планковском уровне квантуется только кривизна пространства-времени.

Отметим примечательную роль безразмерной величины l^2_p / R^2. На планковском уровне эта величина присутствует во многих соотношениях. Действительно, приведем примеры:

1. В выражении для метрического коэффициента g_{oo} имеем

$$g_{oo}=1 - 2l^2_p / R^2$$

2. В решении преобразованного уравнения Эйнштейна (5)

$$y = y_0 \exp [(i / 2l^2_p) R_i R^i] = y_0 \exp [i R_g^2/ 2l^2_p]$$

3. В соотношении неопределенностей (11)

$$\Delta R_i \Delta R^i \geq l^2_p \text{ или } l^2_p / \Delta R_i \Delta R^i \leq 1$$

или проще

$$l^2_p / R^2 \leq 1$$

4. В знаменитом уравнении Хокинга-Бекенштейна для энтропии черных дыр [12] также присутствует величина, обратная l^2_p / R^2. Действительно, энтропия черной дыры равна

$$S = k_b A / 4l^2_p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

где S - энтропия черной дыры, k_b - постоянная Больцмана, A - площадь поверхности горизонта событий, равная $4p\, R_g^{\;2}$. Отсюда получаем

$$S = k_b\, p\, (R_g^{\;2} / l^2_{\;p})$$

Совершенно очевидно, что появление безразмерного отношения $l^2_{\;p} / R^2$ не случайно и свидетельствует о его важном значении для квантовой теории гравитации. Видимо, в квантовой гравитации это безразмерное отношение играет такую же роль, как и постоянная тонкой структуры в квантовой электродинамике.

Из неравенства (11) следует, что не существует такого эксперимента, с помощью которого можно было бы отличить квантованное гравитационное поле от неквантованного. Чтобы отличить "классическое" поле от квантового, необходимо иметь возможность измерять длины, меньшие планковской длины. Но, в соответствии с полученным соотношением неопределенностей, нельзя измерить длину, меньшую планковской длины. Ниже планковской длины операции измерения теряют смысл [4].

Операции измерения теряют свой смысл еще и потому, что в планковских масштабах отсутствует инструментарий для подобных измерений, так как даже фотоны при планковской энергии превращаются в микрочерные дыры [3]. Тем самым гравитация оказывается по ту сторону законов классической и квантовой теорий.

Итак, квантовая теория гравитации является теорией планковских черных дыр, но не теорией планковских струн, как утверждается в [8] или квантовых гравитационных петель, как утверждается в (11).

Найденное здесь уравнение (5) и его квантово-механический вариант, уравнение (8), являются основными уравнениями квантовой теории гравитации. С формальной точки зрения эти уравнения оказались довольно простыми. Необходимо до конца раскрыть их содержание, в частности, связь этих уравнений с работой С. Хокинга 1974 г. по квантовому "испарению" черных дыр (в частности, их связь с уравнением для энтропии черной дыры (14)) , а также их значение для описания физики микромира начиная от 10^{-43} с до 10^{-35} с .

Литература

1. Бронштейн М.П., ЖЭТФ, 6, (1936)

2. Климец А.П., *Физика и философия. Поиск истины*, Брест, "Форт", 1997

3. Klimets A.P. FIZIKA B (Zagreb) **9** (2000) 1, 23 - 42 или http://fizika.hfd.hr/fizika_b/bv00/b9p023.htm

4. Тредер Г.Ю. в сб. "*Проблемы физики: классика и современность*", Москва, Мир,1982

5. Угаров В.А. *Специальная теория относительности*, Москва, Наука,1977

6. Смородинский Я.А. *Черные дыры и геометрия Вселенной*, Москва, Просвещение, 1978

7. Трофименко А.П. *Белые и черные дыры во Вселенной*, Минск, Университетское, 1991

8. Маршаков А.В. *УФН*, **172** 977 (2002) или http://ufn.ioc.ac.ru/Index02.html

9. Климец А.П. *Геоны, черные дыры и фундаментальная планковская длина* или http://aklimets.narod.ru/geon.htm, 2000; см. также Климец А.П. *Гравитационный коллапс фотонов или завершение фундаментальной физики* или http://aklimets.narod.ru/konec_fiziki.htm , 2000

10. S. Carlip, Quantum Gravity: a Progress, gr-qc/ 0108040, (2001)

11. C. Rovelli, Living Rev. Rel. 1-1 (1998).

12. S.W. Hawking, Commun. Math. Phys., 43, 199 (1975)